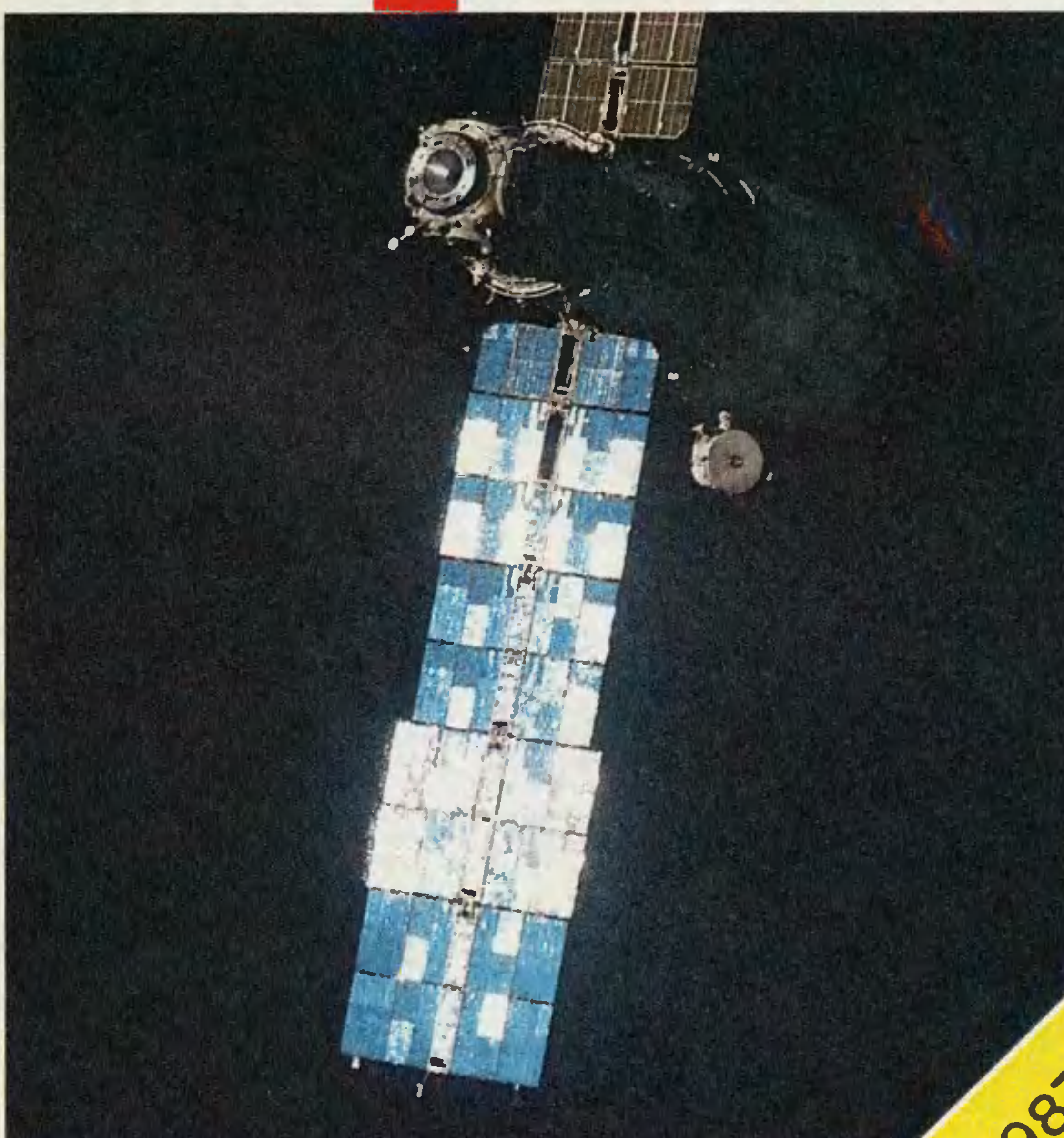
ISSN 0130—2221

Квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

1987



L'ILLUSTRATION

SAMEDI 2 FÉVRIER 1907

L'EXPERIENCE DE "L'ILLUSTRATION" (1er février 1907)

Transmission téléphotographique d'un portrait de M. Fallières, président de la République, sur le circuit Paris-Lyon-Paris

Квант

Основан в 1970 году

1987
5

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

Наша обложка

Солнечные батареи, оптические кабели связи, чувствительные фотодетекторы — все это сегодняшний день оптической электроники. А начало этой самой молодой области полупроводниковой техники было положено ... более ста лет назад. О первых шагах оптоэлектроники рассказывается в статье Г. С. Симина. Фотографии на первой и второй страницах обложки — иллюстрации к этой статье.

Время творить, время дерзать!

Дорогие наши читатели-школьники! В вашей жизни произошло знаменательное событие. После длительной активной подготовки состоялся XX съезд ВЛКСМ. Он открыл новую эру в истории комсомола, стал хорошей практической школой перестройки и демократизации одной из самых массовых общественных организаций нашей страны. Над материалами съезда надо упорно думать, их надо внимательно изучать и обсуждать в коллективах. Ведь они затрагивают все стороны жизни молодежи и подвергают их открытому, честному, критическому анализу.

У нашего комсомола имеются немалые заслуги, отмеченные высокими наградами Родины. Но и его не обошли элементы застоя, бюрократизации, формализма, с которыми мы столкнулись в последние десятилетия как в экономике, так и в социальной действительности. Не имея необходимых условий для самостоятельного преодоления этих негативных явлений, многие из вас утратили социальную активность, замкнулись в кругу личных интересов, пытались приспособиться к окружающей действительности.

Решения съезда по мере их практической реализации приведут к коренному обновлению всех сторон деятельности комсомола. Они призывают вас к активности, самодеятельности, самоуправлению. Ведь вам предстоит участвовать в революционном обновлении социалистического общества. Думайте, спорьте, ищите, предлагайте, настаивайте, добивайтесь, словом, включайтесь в открытую борьбу за совершенствование нашей советской школы, нашего социалистического общества. Овладевайте знаниями, расширяйте свой кругозор, укрепляйте волю, дисциплинируйте характер. Упорная учеба — залог успешной трудовой деятельности в будущей жизни. Но не зубрите, а старайтесь понять изучаемый материал, найти свой интерес в каждом школьном предмете.

Надо преодолеть привычную инерцию в учебе. В отчетном докладе ЦК ВЛКСМ съезду по этому поводу сказано четко: «Приобретение знаний — напряженный труд. Однако в сознании учащихся и студентов по-прежнему живет убеждение, что период учебы — это лишь пора подступов к труду, это еще не сама жизнь, а подготовка к ней». С этим неправильным убеждением надо распрощаться поскорее и навсегда.

В отчетном докладе ЦК ВЛКСМ поставлена и такая задача: «Давайте, товарищи, займемся новым для нас делом — поиском талантов. Ведь это бесценное достояние общества». Таланты пробуждаются рано, еще за школьной партой. Но нелегко бывает их заметить, поддержать, взрастить. Именно к этому и стремится наш «Квант», пробуждая интерес к физико-математическим наукам и стараясь помочь самостоятельному развитию юных талантов.

Выбирайте комсомольскими вожаками тех, кто талантлив, честен, трудолюбив, принципиален, кто может постоять за интересы ученического коллектива. Выбирайте и поддерживайте их своей инициативой, конкретными, интересными для вас делами. Время бесхребетных соглашателей и приспособленцев, ловкачей и тунеядцев уходит в прошлое.

Чаще обращайтесь к Ленину, к его работам послеоктябрьского периода. Ответы на многие вопросы о месте молодежи и комсомола в жизни общества и сегодня можно найти в его речи на III съезде РКСМ, в центральной идее этой речи о том, что главная задача Союза молодежи — учиться коммунизму.

Впереди у вас необычайно интересная и непростая жизнь. Помните, что недалеко то время, когда на ваши плечи ляжет ответственность за будущее социализма, за судьбы человечества. Выступая на съезде, генеральный секретарь ЦК КПСС М. С. Горбачев сказал, обращаясь к молодежи: «Развитие цивилизации сегодня стирает грань между возможным и невозможным. В ваше распоряжение поступает такая колоссальная научно-техническая мощь и интеллектуальный потенциал, каких не было в руках ни у одного из живших на Земле поколений человеческого рода... И, вступая во владение этой мощью, помните, что вы творите будущее».

ЛУЧШЕЕ ПАРИ ДЛЯ ПРОСТАКОВ

Кандидат физико-математических наук
П. А. ПЕВЗНЕР

— Почему ты никогда не играешь? — Спросил Малыш у Смока, когда они как-то раз сидели в «Оленьем роге».— Неужели тебя не тянет к игорному столу?
— Тянет,— ответил Смок.— Но я знаю статистику проигрышей, а мне нужна верная прибыль.

Джек Лондон, Смок Беллью

Вы наверняка знаете игру *орел-решка*: игрок А выбирает какую-нибудь сторону монеты (например, О — орел), сообщает об этом В; В берет другую сторону; после этого подбрасывается монета ... Ни у кого не возникает сомнений в том, что игра орел-решка — честный способ решения спорных вопросов.

В 1974 году Мартин Гарднер в статье «Парадокс, возникающий из-за нетранзитивных отношений» познакомил читателей журнала *Scientific American* с «такой же честной» игрой, которую он назвал *лучшим пари для простаков*. Эта игра сходна с игрой орел-решка, только игроки задумывают слова не из одной буквы, как в игре орел-решка, а из нескольких букв. Например, игрок А задумывает слово ОРО и сообщает об этом В; В в свою очередь задумывает какое-нибудь слово такой же длины, например, ООР. Разумеется, выбранные слова не должны совпадать, поэтому А и сообщает о своем выборе В. После этого игроки начинают подбрасывать монету, записывая результат каждого бросания. Например, после 6 бросаний с исходами: решка, орел, решка, решка, орел, решка, будет записана последовательность РОРРОР. Игра прекращается в тот момент, когда в записываемой последовательности букв на конце возникнет слово, выбранное А или В; в первом случае победа присуждается А, во втором — В. Таким образом, побеждает тот, чье слово появится раньше. Например, если на седьмом броске монеты выпадет О, то победит А, так как будет написано РОРР*ОРО* (курсивными буквами выделено возникшее в последовательности слово, выбранное игроком А); Если на седьмом броске выпадет Р, то игру следует продолжить (так как в РОРРОРР не содержится ни ОРО, ни ООР); при этом в случае, когда на 8-м, 9-м и 10-м бросках выпадут О, О, Р, победит В — ведь будет написано РОРРОРР*ООР*.

Если вы играете в игру орел-решка, то выбор орла или решки — дело вкуса, так как слова О и Р равноправны. На первый взгляд кажется, что и в «лучшем пари для простаков» все слова равноправны. В 1969 году создатель этой игры Вальтер Пенней обнаружил неравноправность слов. Большинство математиков, узнавших правила игры, в первый момент отказываются в это поверить. Тем не менее это так — для многих пар слов выбор одного из них (самого «сильного») обеспечивает преимущество игроку, осуществившему этот выбор: этот игрок выигрывает чаще, чем его противник, игра оказывается нечестной. Более того, существует формула, позволяющая количественно выразить это преимущество.

С этой формулой связана почти детективная история. Гарднер привел ее в своей статье, сославшись на известного английского математика Джона Конвея, сообщившего о ней в письме (без доказательства). Гарднер признался, что у него нет идей о том, как ее доказывать и «предположил», что она получена с помощью магии, как и многие другие результаты Конвея.

Соображения Конвея об этой задаче до сих пор не напечатаны, но в конце 70-х, начале 80-х годов его формула была независимо и разными способами доказана сразу несколькими математиками. Однако все эти работы использовали довольно серьезный математический аппарат, и формула появлялась в них, как фокус: после деления одних трехэтажных выражений на другие. Оказывается, существует элементарное доказательство формулы Конвея, эскиз которого приводится в заключение этой статьи. Более того, сейчас имеется и простой алгоритм для нахождения лучшего ответа для второго игрока, хотя первоначальный замечательный алгоритм (для слов из трех букв), предложенный в статье Гарднера и принадлежащий его коллеге Б. Волку, по туманности и запутанности не уступает алхимическим рецептам получения философского камня.

Но мы отвлеклись. Осталось невыясненным, почему слова в нашей игре могут быть неравноправными.

Какое слово сильнее?

Рассмотрим конкретный пример. Представим себе, что в игре с двухбуквенными словами игрок А поставил на комбинацию «решка-решка», а В — на комбинацию «орел-решка». Тогда А выиграет, т о л ь к о если при первых двух бросаниях выпадет РР: если выпадет ОР, сразу же выигрывает В, если выпадет РО или ОО, то В т о ж е выиграет, хотя и не сразу; именно, в последних двух случаях В выиграет, как только при очередном бросании выпадет Р (а это когда-нибудь и произойдет — при честном бросании монета не может всегда выпадать орлом). Таким образом, из четырех равновозможных случаев (РР, ОР, РО, ОО) игрок А выигрывает в одном (РР), т. е. шансы на выигрыш у А в три раза хуже, чем у В.

По поводу игры с двухбуквенными словами стоит заметить, что умный игрок А не будет выбирать слово РР (равно как и слово ОО). Он выберет слово ОР (или РО), а тогда его шансы на выигрыш и проигрыш одинаковы, если, конечно, В не выберет одно из «слабых» слов ОО или РР (проверьте!).

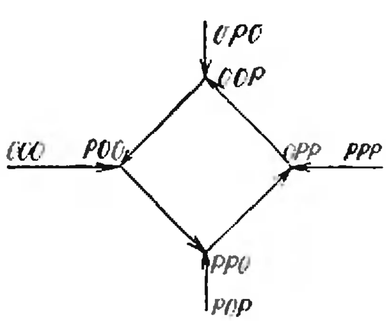


Рис. 1.

Но если перейти к трехбуквенным словам, картина принципиально меняется. Именно: *какое бы трехбуквенное слово не выбрал игрок* А, *его соперник* В *может подобрать другое слово, которое ему дает больше шансов на выигрыш.*

— Как же так,— спросит читатель,— почему бы игроку А не выбрать «самое сильное» слово, ведь он выбирает первым? А дело как раз в том, что нет самого сильного слова. Ситуацию наглядно поясняет рисунок 1. На нем выписаны все трехбуквенные слова составленные из букв О, Р, а красные стрелки между двумя словами указывают, какое из этих двух слов сильнее (т. е. дает больше шансов на выигрыш).

Посмотрите на рисунок 1: из каждого слова в ы х о д и т хотя бы одна стрелка; значит, для любого слова есть более сильное, т. е. *нет самого сильного слова.* Обратите внимание на цикл из слов РРО, ОРР, ООР, РОО и РРО. Мы видим: из того, что слово X сильнее Y, а Y сильнее Z, вовсе не следует, что X будет сильнее Z (ситуация, которая часто возникает в спортивных соревнованиях). Математики говорят, что отношение «быть сильнее» *нетранзитивно* (отсюда и название упомянутой статьи Гарднера). Имея в своем распоряжении рисунок 1, игрок В, руководствуясь стрелками, всегда может в ответ на выбор А выбрать для себя более сильное слово. И тогда он будет чаще выигрывать, чем его противник.

Но насколько чаще? И откуда следует, что рисунок 1 правильно отражает реальную ситуацию? На эти вопросы нам предстоит ответить.

Оценим шансы на выигрыш

Вернемся к двухбуквенной игре. Будем, как и раньше, предполагать, что наивный игрок А выбрал слово $A=11$, а его хитрый противник В поставил на слово $B=01$ (вместо букв О, Р мы теперь пишем цифры 0, 1, а игрока и выбранное им слово обозначаем одной буквой). Последовательности бросаний монеты, на которых выигрывает А, будем называть *A-сериями* (аналогично определяются *B-серии*). Например, 11 — A-серия, а 01, 001, 0001, 101, 1001, 10001 — B-серии.

B \ A	00	01	10	11
00		1/2	1/4	1/2
01	1/2		1/2	3/4
10	3/4	1/2		1/2
11	1/2	1/4	1/2	

Таблица 1.

B \ A	00	01	10	11
00		1	1/3	1
01	1		1	3
10	3	1		1
11	1	1/3	1	

Таблица 2.

Очевидно, что 11 — единственная A-серия (т. е. А выигрывает в том и только в том случае, когда первые два броска монеты дают 1). Далее, не менее очевидно, что B-серии имеют вид 0...1, либо 10...1 (на месте многоточия может стоять любое число нулей).

Итак, 11 — единственная A-серия. Давайте попытаемся определить вероятность*) выигрыша А, т. е. долю случаев, в которых после двух бросаний появляется последовательность 11.

В результате одного бросания возможны два исхода (0 и 1) — вероятность каждого исхода равна 1/2. В результате двух бросаний возможны четыре исхода, вероятность каждого равна 1/4, следовательно вероятность выигрыша А равна 1/4 (т. е. А выигрывает в 1/4 всех случаев):

$$P(A, B)=P(11)=1/4$$

(через $P(A, B)$ обозначена вероятность выигрыша А у В, через $P(11)$ — вероятность серии 11).

В результате n бросаний могут получиться 2^n (равновозможных) исходов; следовательно, вероятность каждой серии длины n равна $1/2^n$. Для того, чтобы посчитать вероятность $P(B, A; n)$ выигрыша В за n шагов или менее, необходимо найти вероятность каждой B-серии длины $\leqslant n$ и просуммировать эти вероятности. Получим

$$P(B, A; n)=P(01)+P(001)+\ldots$$

$$\ldots+P(\overbrace{0\ldots0}^{n-1}1)+P(101)+P(1001)+\ldots$$

$$\ldots+P(1\underbrace{0\ldots0}_{n-2}1)=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Следовательно, В выигрывает у А за n шагов или менее с вероятностью, которая при больших n очень близка к 3/4; вероятность того, что после n бросаний еще никто не выиграл, равна $1/2^{n-1}$ (т. е. ничтожно мала при больших n). Переходя к пределу в равенстве $P(B, A; n)=3/4-1/2^{n-1}$ при $n\to\infty$, можно считать, что мы получим вероятность $P(B, A)$ выигрыша В у А при «неограниченном продолжении» игры:

$$P(B, A)=3/4.$$

Вероятность выигрышей для произвольных двухбуквенных слов A и B показана в таблице 1 (число, стоящее на пересечении строки B и столбца A, дает вероятность выигрыша В у А). Эту таблицу несложно составить.

Оценим преимущество

По таблице 1 строится таблица 2, дающая *преимущество В над А*

$$d(B, A)=\frac{P(B, A)}{P(A, B)}. \qquad (1)$$

В таблице 3 приводятся преимущества для всех трехбуквенных слов. Пользуясь этой таблицей мы и построили «нетранзитивный» граф, показанный на рисунке 1.

Но как найдены числа в таблице 3? К сожалению, формула (1) малопригодна для вычислений при длине слов $l\geqslant 3$. Уже для трехбуквенных слов A, B найти $P(A, B)$ непосредственно — весьма неприятная задача, а для больших l — безнадежная. Но тут нас выручает «магическая»

*) Мы не определяем здесь понятие *вероятности* — в нашей статье слова «вероятность» и «доля случаев» — синонимы. Читателей, желающих ознакомиться с этим понятием, мы отсылаем к книге: А. Н. Колмогоров, И. Г. Журбенко, А. В. Прохоров, *Введение в теорию вероятностей*, М.: Наука, 1978.

B \ A	000	001	010	011	100	101	110	111
000		1	2/3	2/3	1/7	5/7	3/7	1
001	1		2	2	1/3	5/3	1	7/3
010	3/2	1/2		1	1	1	3/5	7/5
011	3/2	1/2	1		1	1	3	7
100	7	3	1	1		1	1/2	3/2
101	7/5	3/5	1	1	1		1/2	3/2
110	7/3	1	5/3	1/3	2	2		1
111	1	3/7	5/7	1/7	2/3	2/3	1	

Таблица 3.

Формула Конвея

Формула Конвея позволяет найти $d(B, A)$ при произвольных B и A, не вычисляя никаких вероятностей. Для того, чтобы объяснить эту формулу, нам нужно определить многочлен Конвея $K_{XY}(t)$ слов X, Y.

На рисунке 2 слово Y шесть раз записано под словом X, причем каждое новое слово Y сдвигается на одну позицию вправо по сравнению с предыдущим (для n-буквенных слов слово Y будет записано под X n раз). Каждому сдвигу слова Y поставим в соответствие число 1 или 0 в зависимости от того, совпадают ли все буквы, находящиеся друг под другом в общих позициях X и Y, или нет. Полученное таким образом слово (длины n) из нулей и единиц называется *корреляцией* X и Y и обозначается $\langle XY \rangle$. Так, например, для 2-го сдвига Y общие позиции совпадают, поэтому во второй строке на рисунке 2 записана единица — вторая буква слова $\langle XY \rangle$. В нашем примере

$$\langle XY \rangle = 010011.$$

В общем случае, пусть $\langle XY \rangle = e_1 ... e_n$ (где e_i — нули или единицы). Тогда *многочлен Конвея слов* X, Y определяется так:

$$K_{XY}(t) = e_1 + e_2 t + ... + e_n t^{n-1}$$

В нашем случае $K_{XY}(t) = t + t^4 + t^5$.

X=100100	Корр. XY	начало X до Y
Y=001001	0	
001001	1	1
001001	0	
001001	0	
001001	1	1001
001001	1	10010

Рис. 2.

Очень странное определение! Во всяком случае совершенно непонятно, как до него можно было додуматься. Но оно работает — на нем основана формула Конвея:

$$\boxed{d(B, A) = \frac{K_{AA}(1/2) - K_{AB}(1/2)}{K_{BB}(1/2) - K_{BA}(1/2)}.} \qquad (*)$$

Можно понять Гарднера, когда он приписывает вывод этой необычной формулы «потусторонним» силам: ну магия, и только!

Не останавливаясь пока на выводе формулы (*), поясним, как ею пользоваться. Сначала нужно найти корреляции $\langle AA \rangle$, $\langle AB \rangle$, $\langle BB \rangle$, $\langle BA \rangle$. Затем по ним написать четыре многочлена Конвея, в каждый из них подставить $t = 1/2$ и, наконец, выполнить действия, указанные в пра-

$X=100100 \qquad Y=001001$

$XY=010011$

$K_{XY}(t)=t+t^4+t^5,\ K_{XY}(1/2)=19/32$

XY-ростки : 1, 0100, 01001

$YX=001001$

$K_{YX}(t)=t^2+t^5,\ K_{YX}(1/2)=9/32$

YX-ростки : 00, 00100

$XX=100100$

$K_{XX}(t)=1+t^3,\ K_{XX}(1/2)=9/8$

XX-ростки : $\varnothing$, 100

$YY=100100$

$K_{YY}(t)=1+t^3,\ K_{YY}(1/2)=9/8$

YY-ростки : $\varnothing$, 001

$$d(Y,X)=\frac{K_{XX}(1/2)-K_{XY}(1/2)}{K_{YY}(1/2)-K_{YX}(1/2)}=\frac{9/8-19/32}{9/8-9/32}=\frac{17}{27}$$

Рис. 3.

вой части формулы (*). Конкретный пример разобран на рисунке 3.

Имея таблицу преимуществ и зная загаданное игроком А слово A, игрок В легко найдет оптимальный выбор ответа B — для этого ему нужно лишь разыскать максимальное значение в столбце под словом A. Например, для первого столбца $A=000$ (табл. 3), $d_{\max}=7$, и нужно взять $B=100$. Это обеспечивает семикратное преимущество. В таблице 3 максимальные элементы в столбцах обведены в кружочки — все они не меньше 2; — следовательно, при любом выборе А, В может ответить так, что у В будет по крайней мере 2-кратное преимущество в игре.

Как выбрать ответное слово?

Мы уже объяснили, как это сделать. Но при этом предположили, что предварительно составлена таблица преимуществ. Нельзя ли, зная слово A, непосредственно найти оптимальный ответ B, не вычисляя всей таблицы (или целого ее столбца, длина которого равна 2^l)?

Оказывается — можно. Расскажем, как это делается.

Пусть игрок А выбрал слово $A=a_1\,a_2\,\dots\,a_l$ ($l>2$, a_i равно 0 или 1). Тогда игроку В следует выбрать слово $B=b_1\,b_2\,\dots\,b_l$,

$$b_2=a_1,\ b_3=a_2,\ \dots,\ b_l=a_{l-1}$$

(пока первая буква b_1 слова B не фиксируется).

В этом случае при сдвиге слова A на одну позицию относительно B

$$\begin{array}{l} B=b_1b_2b_3\dots b_l \\ A=\quad a_1a_2\dots a_{l-1}a_l \end{array}$$

все буквы, находящиеся друг под другом, совпадают, поэтому первый член в многочлене $K_{BA}(t)$ при $t=1/2$ равен $1/2$ — мы тем самым стремимся максимизировать значение $K_{BA}(1/2)$ в формуле Конвея. Вообще предлагаемый выбор оптимального ответа основан на (довольно тонком) анализе формулы Конвея, который мы проводить не будем.

Осталось объяснить, как выбирается b_1. Обозначим $A'=a_1a_2\dots a_{l-1}$. Пусть r — минимальное число, при котором после сдвига A' на r позиций происходит совпадение написанных друг под другом букв:

$$\begin{array}{l} A'=a_1\dots a_ra_{r+1}\dots a_{l-1} \\ A'=\qquad\quad a_1\quad\dots a_{l-r-1}a_{l-r}\dots a_{l-1} \end{array}$$

(т. е. $a_1=a_{r+1}$, $a_2=a_{r+2}$, ..., $a_{l-r-1}=a_{l-1}$). Так вот, букву b_1 следует выбирать по правилу $b_1\neq a_r$ (например, при $A=100100$ имеем $r=3$, и следует брать $B=110010$).

Американские математики Гуибас и Одлыжко доказали в 1981 году, что такой выбор слова B — оптимален. Более того, ими доказано, что число

$$\min_A \max_B d(B,A)$$

(т. е. преимущество В над А при самом лучшем для А выборе слова A) стремится к 2 при возрастании l. Другими словами, при указанном выборе ответа второй игрок в среднем выигрывает в два раза чаще самого хитрого первого игрока.

Нам осталось лишь привести обещанное доказательство.

Эскиз доказательства формулы Конвея

Даны слова A, B длины $l>2$. Через S_A обозначим (бесконечное) множество *укороченных A-серий*, т. е. всех слов, получаемых из A-серий отбрасыванием их последних l букв. Аналогично определим S_B. Пусть $m_1, \dots, m_k$ номера разрядов слова $\langle XY\rangle$, где стоит 1 (напомним, что $\langle XY\rangle$ — это корреляция слов X и Y); через H_{XY} обозначим множество из k слов, составленных соответственно из первых $m_1, m_2, \dots, m_k$ букв слова X. Через $M*H$, где M и H любые множества слов, обозначим *слияние* M и H, т. е. новое множество, составленное из всех слов вида XY (слова X и Y записаны подряд в одно слово, $X\in M$, $Y\in H$). На-

(Окончание см. на с. 15)

ОПТИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОНИКА ПРИ СВЕЧАХ

Кандидат физико-математических наук
Г. С. СИМИН

Оптическая электроника (или оптоэлектроника) — самая молодая и, возможно, самая перспективная область современной полупроводниковой электроники, любимица физиков, разработчиков сверхбыстродействующих ЭВМ и систем сверхдальней связи. Ею занимаются самые передовые лаборатории мира, оснащенные наисовременнейшим оборудованием. И уж конечно не при свете свечей. Между тем наш рассказ об оптоэлектронике мы начнем с тех далеких времен, когда в России А. Н. Лодыгин еще только разрабатывал первые конструкции угольных ламп накаливания, а Европа освещалась в основном свечами и газовыми фонарями.

Из многих известных в XIX веке полупроводников — как тогда говорили, веществ, «худо проводящих электричество»,— селен был материалом, удостоенным особого внимания ученых. Дело в том, что в 1873 году английский телеграфный служащий А. Мей случайно обнаружил, что сопротивление селена резко уменьшается, если на него падает свет. Возможно, Мей не слишком обрадовался новому явлению, так как обнаружил его, исследуя селеновые изоляционные опоры телеграфного кабеля. Но руководитель Мея, инженер У. Смит, сразу оценил важность открытия. Он быстро провел первые исследования и в том же 1873 году сообщил о них в печати. Это сообщение вызвало бурный интерес у физиков всего мира.

К исследованию селена обратились ученые из Германии, Франции, Англии, России, Америки. Предпринимались многочисленные попытки повысить светочувствительность селена. С этой целью были испробованы десятки способов его получения. Однако все эти поиски велись практически «вслепую» — ведь физики XIX века и понятия не имели о невероятной чувствительности полупроводников к примесям, о методах их очистки. Поэтому публикуемые результаты противоречили друг другу, приводимые численные данные различались в десятки и сотни раз. Встречались и просто курьезные (с нашей, сегодняшней точки зрения) сообщения. Некоторые авторы писали, например, что светочувствительность селена возрастает, если рядом с ним положить каучук или камфару, побывавшие перед тем в озоне. Другие сообщали, что селен наиболее чувствителен к соседству с терпентинным маслом. Однако не следует забывать, что в то время полупроводники еще не были осознаны как особый, удивительный класс материалов. Так что не спешите посмотреть свысока на эксперименты столетней давности — это были первые шаги на пути, который привел к созданию оптической электроники.

«Селеновый бум» привлек внимание знаменитого немецкого электротехника Вернера Сименса. Сименс был наделен редкостным изобретательским талантом. Еще двадцатипятилетним молодым человеком, отбывая пятилетнее тюремное заключение за участие в дуэли, он изобрел способ гальванического серебрения и золочения и позолотил свою тюремную ложку, перенеся на нее золото с завалявшейся в кармане монеты. Это было в начале сороковых годов XIX века. В семидесятые годы Сименс, крупный промышленный магнат, почетный доктор Берлинского университета, член Берлинской академии наук, автор ртутного эталона сопротивления, увековечившего его имя, оставался таким же неукротимым изобретателем, как в юности. Он увлекся изучением селена, и это увлечение имело весьма серьезные последствия для дальнейшей судьбы селена. В 1875 году Сименс опубликовал статью, в которой, наряду с детальным описанием способов получения и свойств селена, сообщил об изобретенном им новом приборе — абсолютном электрическом фотометре. Скажем несколько слов о фотометрии и ее состоянии в XIX веке, чтобы вы лучше смогли оценить изобретение Сименса.

Можно считать, что фотометрия зародилась во II веке н. э., когда Птолемей начал изучать яркость звезд. И все дальнейшее развитие этой области науки было связано, в основном, с астрономическими наблюдениями. В 1604 году Кеплер установил законы освещенности. В 1729 году французский ученый П. Бугер сформулировал принцип фотометрии и заложил начала научных измерений в этой области. Идея Бугера состояла в том, чтобы использовать способности глаза улавливать разницу освещенностей, даже если эта разница составляет всего 1 %. В фотометре Бугера две части экрана освещаются двумя источниками — изучаемым (например, звездой) и «эталонным» (например, свечой). Освещенность той части экрана, на которую светит эталонный источник, можно менять (например, приближая или удаляя свечу). При равенстве освещенностей, создаваемых изучаемой и «искусственной» звездой, положение последней регистрируется. Таким образом можно делать косвенные измерения.

Фотометр Бугера неоднократно усовершенствовался в течение более 100 лет, однако основной принцип его работы был неизменным: равенство освещенностей констатировал глаз. Устал астроном — точность измерений резко падает; при различных оттенках цвета измеряемого и эталонного источников оценка становится затруднительной; появился в поле зрения яркий предмет — снова ошибка в измерениях. Субъективный характер измерений стал серьезным недостатком фотометрии. А между тем потребность в фотометрах росла: к небесным светилам прибавлялись земные лампы, яркость которых тоже нужно измерять.

Занявшись исследованием селена, Сименс не мог пропустить возможность практического использования выполненных экспериментов. Он сконструировал фотометр, в котором впервые субъективная оценка на глаз была исключена и интенсивность света могла быть выражена в электрических единицах. Электрическая цепь фотометра Сименса состояла из гальванического элемента, гальванометра и куска селена с проволочными электродами. В темноте сопротивление селена так велико, что стрелка гальванометра почти не отклоняется. При освещении селена его сопротивление падает, ток увеличивается, и стрелка гальванометра отклоняется тем сильнее, чем ярче свет. (Именно так работает и современный фотоэкспонометр!)

На основе селенового фоторезистора Сименс сделал первую в мире оптоэлектронную игрушку (конечно, в то время ее никто так не называл; термин «оптоэлектроника» появился много десятков лет спустя). Основным элементом этой игрушки была модель человеческого глаза, в которую был вмонтирован селеновый фоторезистор. Стоило приблизить к глазу зажженную свечу — и он тут же закрывался, «щурясь» от яркого света, совсем как живой.

Изобретение селенового фотометра дало толчок к появлению целой серии остроумных приборов. Интересным и очень смелым для того времени развитием работ Сименса явилось изобретение американского инженера Дж. Кэри. В том же 1875 году он предложил проект устройства для передачи изображений на расстояние. Принцип действия этого устройства представляется теперь очень простым. Передаваемое изображение сначала проецируется на приемник, который состоит из большого числа селеновых ячеек, составленных вплотную. Сопротивление ячеек изменяется в различной степени в зависимости от того, насколько ярко освещена та или иная ячейка. Воспроизводится изображение на «экране», который представляет собой панель с лампочками, причем число лампочек равно числу селеновых ячеек приемника. Каждая лампочка соединена последовательно с соответствующей ячейкой и источником напряжения. При включении напряжения яркость свечения той или иной лампочки тем больше, чем меньше сопротивление соединенного с ней селенового элемента, т. е. чем ярче освещена соответствующая ячейка. При достаточно большой длине проводов, соединяющих приемник и экран, изображение может быть передано на значительное расстояние.

Изобретение Кэри, однако, оказалось в то время практически нереализуемым. Ведь если приемник содержит, например, 100×100 ячеек, то необходимо протянуть до экрана 10 000 проводов и подключить их к 10 000 лампочек, к 10 000 источников, и чтобы ни одна лампа не перегорела!

Несколько следующих применений селенового фоторезистора вызвали настоящие сенсации.

В далеком Вашингтоне Александр Грехем Белл с интересом читал поступающие из-за океана сообщения об исследованиях селена и сам испробовал немало способов приготовления материала с высокой светочувствительностью. После нескольких удачных опытов Беллу пришла в голову странная на первый взгляд мысль — в электрической цепи, в которую был включен исследуемый селеновый образец, заменить гальванометр... телефоном. Мысль эта не покажется столь уж странной, если вспомнить, что незадолго до того Белл как раз взял патент на первый в мире телефон и теперь с успехом распространял свое детище по всей стране. Телефон Белла издавал звуки, если ток, текущий через него, менялся достаточно быстро. Поэтому Белл решил, что если в цепи последовательно с телефоном *) будет включен селеновый фоточувствительный образец, то телефон будет звучать, когда свет, падающий на селен, будет часто прерываться. 17 мая 1878 года, читая лекцию в Королевском институте в Лондоне, доктор Белл объявил, что «возможно слышать звуки, вызванные прерыванием света». Мелодические звуки разной высоты Белл получал, меняя скорость вращения диска с прорезями, расположенного между ярким источником и селеновым приемником.

Два года спустя эта идея Белла получила сенсационное развитие.

Солнечным летним днем 1880 года жители Вашингтона с удивлением наблюдали, как прилично одетый господин устанавливал на крыше Франклиновской школы странное сооружение. Многие узнали в господине друга и помощника профессора Белла мистера Тейнтера. Тейнтер направил на солнце небольшое зеркало; отраженный солнечный свет проходил через несколько линз и ярким тонким лучом упирался прямо в окно стоящего напротив здания. В этом здании помещалась исследовательская лаборатория Белла. Став позади зеркала и приспособив к нему нечто вроде рупора, Тейнтер начал что-то негромко говорить в рупор, глядя при этом на окно лаборатории. В ответ в окне появился мистер Белл, размахивающий шляпой.

В этот день Белл и Тейнтер успешно осуществили беспроводную оптическую телефонную связь. Сооружение на крыше было передающей станцией. В лаборатории Белла располагалась приемная станции. Посылаемый с крыши луч падал на фотоприемник — селеновый фоторезистор, включенный в электрическую цепь последовательно с телефоном. Когда Тейнтер говорил в рупор, звуковые колебания заставляли зеркало слегка вибрировать. При этом из-за «расфокусировки» менялась освещенность фотоприемника ... Поднеся к уху телефон, Белл отчетливо услышал голос Тейнтера: «Мистер Белл, если вы слышите меня, подойдите к окну и помашите шляпой». Ответ Белла свидетельствовал о полном успехе опыта.

Сенсационное сообщение об эксперименте Белла и Тейнтера вызвало новую волну повышенного интереса к селену, новые попытки увеличить его светочувствительность. Последователь Белла, его соотечественник, С. Фритс сумел получить образцы, сопротивление которых под действием солнечного света уменьшалось более чем в 300 раз (Белл и Сименс достигли лишь пятнадцатикратного изменения). Фритс предложил и еще одно возможное применение селена. Если подключить селеновый фоторезистор к какому-либо электрическому аппарату, то этим аппаратом можно будет управлять при помощи света. Например, селеновый элемент может быть включен в цепь электромагнитного реле. При освещении элемента его сопротивление уменьшится, ток в цепи возрастет, и контакты реле замкнутся без всякого прямого вмешательства в электрическую цепь реле. В этой идее содержится принцип действия так называемой оптопары — одного из основных элементов

---

*) Имеется в виду не телефонный аппарат в целом, который мы и привыкли называть телефоном, а сам звучащий элемент Белла — электромагнит с мембраной.

современной автоматики (вспомните хотя бы пропускные автоматы в метро). И хотя оптопары появились лишь во второй половине нашего столетия, идея оптического управления с помощью селенового элемента была очень эффектно реализована намного раньше.

1 февраля 1907 года в Париже в переполненном конференц-зале перед журналистами, учеными, предпринимателями и членами правительства выступал инженер из Мюнхена Артур Корн. Слева и справа от него на длинном столе располагались два больших медленно вращающихся цилиндра непонятного для публики назначения.

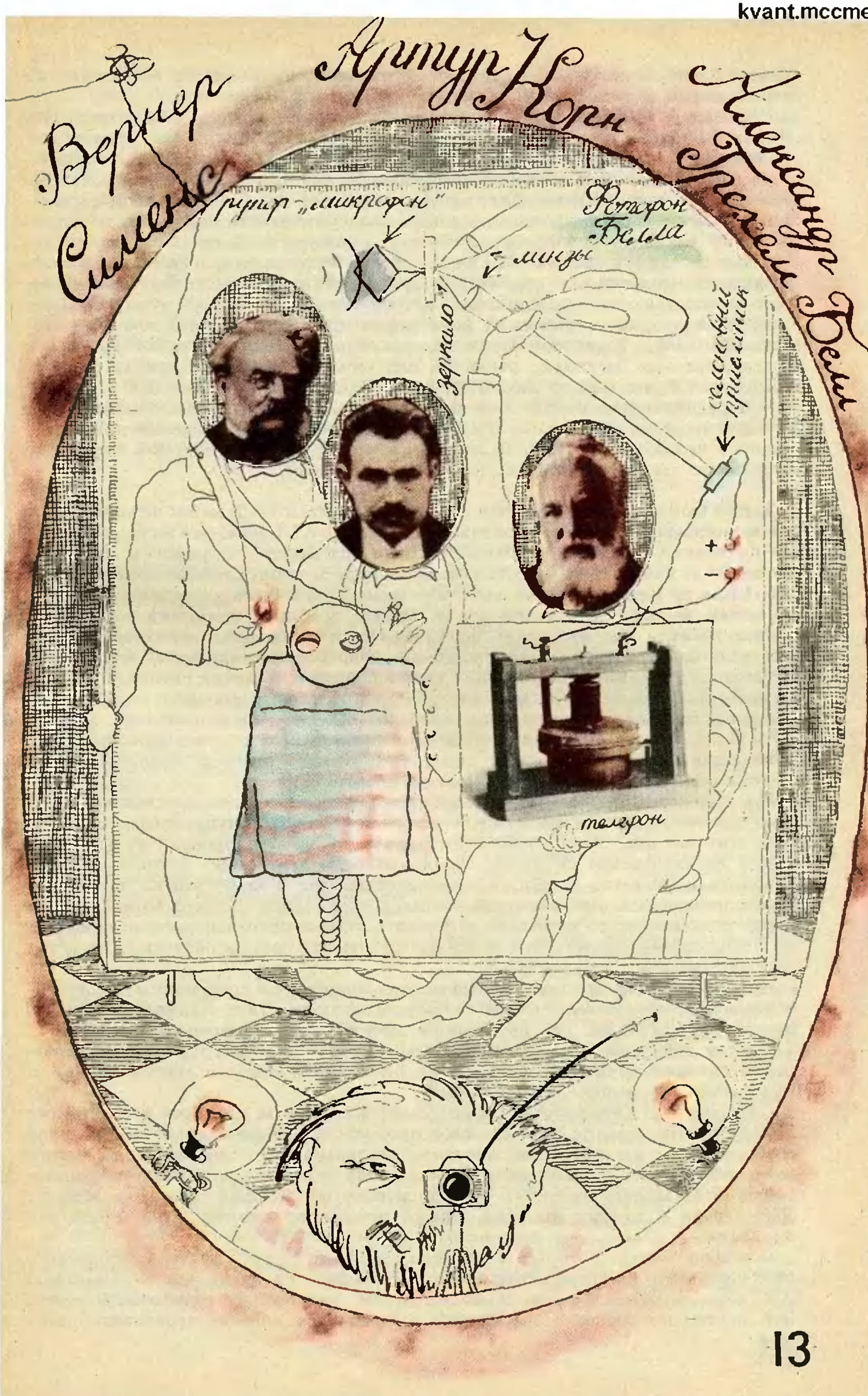
«Мадам и месье,— начал свое выступление Корн,— проблема передачи фотографий по телеграфу решена! Это можно делать так же, как мы передаем по телефону звук.»

В конференц-зале присутствовали люди, весьма далекие от науки, поэтому Корн долго и пространно объяснял устройство телефона и телеграфа, разные технические детали. Сегодняшний читатель «Кванта» знаком с этими «подробностями», и поэтому мы сразу перейдем к изложению идеи фототелеграфа, реализованной впервые восемьдесят лет назад.

Фотография не передается целиком, а разбивается на 100 полос, а каждая полоса — на 100 элементов. На передающей станции надо измерить тон каждого элемента и соответственно повернуть регулятор тока. На приемной станции это изменение тока изменит силу света лампы, которая засвечивает участок фотопленки. Теперь нужно перейти к следующему элементу на передающей станции и соответственно передвинуть фотопленку на приемной. Идея хороша, но если тратить только 5 секунд на передачу одного элемента, то на передачу всей фотографии понадобится, увы, 14 часов непрерывной работы. Вот если бы регулятор тока работал автоматически, мгновенно измеряя тон каждого элемента и сообщая его приемной станции...

Таким автоматическим регулятором может служить селеновый фотоэлемент. Сфокусированный свет лампы, пройдя сквозь фотографию, свернутую в виде цилиндра, отражается зеркальцем на селеновый фотоэлемент, который регулирует ток в телеграфном проводе. Вращается цилиндр на передающей станции, строго с той же скоростью вращается цилиндр на приемной станции. Медленно ползет вниз лампа, «просматривающая» фотографию,— с той же скоростью ползет луч, засвечивающий фотопленку. А селеновый образец посылает в линию связи импульсы, точно отражающие прозрачность очередного элемента. Просто, не так ли?

Между тем Корн потратил на реализацию своей идеи более трех лет. И проблемой был вовсе не селен, нет, полупроводник работал безотказно.


Вернер Сименс
Артур Корн
Александр Грехем Белл
рупор „микрофон"
Фотофон Белла
линзы
зеркало
селенный приемник
+
–
телефон

Главная сложность была в достижении полной синхронности механических перемещений и равенства скоростей вращения барабанов.

Наконец, к 1907 году проблема была решена. И вот демонстрация в Париже. Барабаны, установленные слева и справа от Корна,— это передающая и приемная станции. А провода, выходящие из передающей станции, подсоединены к телеграфной линии Париж — Лион. (На второй странице обложки помещена фотография из французского журнала «L'Illustration», в котором сообщалось о сенсационном эксперименте Корна.) Сигнал от селенового элемента бежит по одной паре проводов в Лион, а по другой — обратно, в Париж, всего 1000 километров. Фотография, помещенная в передающем цилиндре, «просматривалась» 12 минут. Пленку из приемного цилиндра тут же проявили и отпечатали — и под рукоплескания зала была продемонстрирована фотография президента Французской республики Фоллиера. Корн, принимая поздравления, заявил, что не сомневался в успехе, так как несколько ранее им был столь же удачно передан портрет президента Рузвельта по линии Мюнхен — Нюрнберг — Мюнхен.

Передача изображений с помощью фотоэлемента стала быстро завоевывать признание. Аппараты, действующие по разработанному Корном принципу, удалось усовершенствовать настолько, что они могли с высокой четкостью передавать на расстояние мелкий газетный текст.

* * *

Таким был этот самый первый и не слишком известный виток истории полупроводниковых приборов. Зародившиеся в конце XIX века, они на год опередили появление телефона и трансформатора, на 20 лет — радио и почти на 50 лет — ... самих себя, то есть рождение класса «полупроводниковых приборов»! Как ни парадоксально, но изобретение Корна было последним крупным событием на этом начальном этапе. Новых приборов пришлось ждать еще долгие десятки лет. Это время понадобилось для создания квантовой теории электрических свойств полупроводников, разработки уникальных методов их очистки от случайных примесей, а также способов введения строго контролируемого количества нужных примесей, изготовления сложных комплексов оборудования для производства приборов. Только после этого на рубеже 50-х годов нашего столетия и стало возможным начало «полупроводниковой революции», одним из самых передовых отрядов которой является современная оптическая полупроводниковая электроника.

Эта интереснейшая наука, сокращенно называемая оптоэлектроникой, изучает законы превращения электрического тока через полупроводник в свет и обратные законы, по которым свет, падающий на полупроводник, вызывает в нем электрические сигналы. На основе оптоэлектроники сегодня создано огромное количество приборов, прочно вошедших в нашу жизнь и ставших уже привычными. Достойно удивления и восхищения то, что более 100 лет назад ученые сумели не только изготовить первые оптоэлектронные приборы, но и с поразительной интуицией предвосхитить важнейшие области их будущего использования и развития.

Чувствительный фотометр Сименса стал прообразом современных полупроводниковых приемников света — фотодетекторов. Они улавливают слабые оптические сигналы на расстоянии десятков километров от источника, «читают» оптические команды современных станков с программным управлением, сигнализируют об обрыве или окончании ленты в магнитофонах и выполняют еще много важных задач.

Попытка Дж. Кэри изготовить светящийся экран для передачи изображения на расстояние сегодня находит свое продолжение в работах исследователей многих стран по созданию плоского телевизионного экрана, призванного заменить громоздкий кинескоп современных телевизоров. Информационные табло («светящиеся газеты»), установленные на крышах зданий в Москве, Ленинграде и других городах, прямо реализуют смелую идею столетней давности.

Фотофон Белла, который был надолго забыт в результате многолетнего триумфального шествия электрического телефона по всему миру, в 70-е годы XX века родился заново в виде систем оптической телефонной связи. Эти системы позволяют по одному оптическому кабелю передавать одновременно тысячи телефонных разговоров; не будь таких систем, и к началу XXI века, по мнению специалистов, телефонная сеть стала бы настолько перегруженной, что при наборе любого номера непременно звучал бы сигнал «занято».

В самые отдаленные уголки нашей страны каждое утро поступают свежие газеты, переданные по фототелеграфу, придуманному в начале века.

Все большее значение в качестве источников электроэнергии приобретают солнечные батареи. Они установлены на космических кораблях, на крышах зданий в высокогорных районах, в микрокалькуляторах. Идея создания таких батарей была выдвинута в 1884 году. В 30-х годах нашего столетия академик А. Ф. Иоффе организовал первые работы по изготовлению высокоэффективных солнечных элементов. (На первой странице обложки вы видите фрагмент солнечной батареи, установленной на космической станции «Мир». Эта фотография была сделана космонавтами Л. Кизимом и В. Соловьевым с борта космического корабля «Союз Т-15».)

Эти и многие другие замечательные приборы, уже созданные и те, что появятся в будущем, сегодняшний и завтрашний день оптической электроники — все это зародилось более ста лет назад, в несовершенных экспериментах со скромным кристалликом селена.

Лучшее пари для простаков

(Начало см. на с. 4)

помним, что $P(X)$ обозначает вероятность появления слова X в процессе игры со словами A, B, а $P(A, B)$ — вероятность выигрыша А у В. Формула Конвея вытекает из следующих трех утверждений (доказательство каждого из них — задача для читателя).

1. Для любых слов X, Y длины l

$$K_{XY}\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{S\in H_{XY}} P(S).$$

2*. Множество T всех слов не содержащих ни A, ни B (т. е. последовательностей, на которых ни один из игроков еще не выиграл), можно представить в виде

$$T_1=(S_A*H_{AB})\cup(S_B*H_{BB});$$
$$T_2=(S_B*H_{BA})\cup(S_A*H_{AA}),$$

притом $T_1=T_2=T$ (обе эти формулы задают **о д н о** множество T).

3. Суммы вероятностей слов из T_1 и T_2 выражаются формулами

$$\sum_{S\in T_1} P(S)= =2^l\left[P(A, B)\,K_{AB}\left(\frac{1}{2}\right)+P(B, A)\,K_{BB}\left(\frac{1}{2}\right)\right],$$

$$\sum_{S\in T_2} P(S)= =2^l\left[P(B, A)\,K_{BA}\left(\frac{1}{2}\right)+P(A, B)\,K_{AA}\left(\frac{1}{2}\right)\right].$$

Чтобы доказать формулу Конвея, остается только приравнять правые части последних двух равенств (это можно, ибо $T_1=T_2$) и воспользоваться определением $d(B, A) = =P(B, A)/P(A, B)$.

Для читателя, вошедшего во вкус, предлагаем

Решенные и нерешенные задачи

1. Пусть подбрасывается не монета, а игральный кубик, и загадывается слово из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6. Докажите, что тогда преимущество второго игрока над первым выражается формулой

$$d(B, A)=\frac{K_{AA}(1/6)-K_{AB}(1/6)}{K_{BB}(1/6)-K_{BA}(1/6)}.$$

2. Неизвестно, как должен играть А, для того, чтобы его проигрыш был минимальным (в игре с монетой) при $l\geqslant 3$.

3. Не исследован случай, когда А загадывает слово из n букв, а В — из m букв ($m>n$). Каковы оптимальные стратегии в этом случае?

4. Неизвестны стратегии ни одного из игроков А, В, С для игры трех лиц. Попытайтесь понять, как должен играть С для того, чтобы максимизировать выигрыш, при фиксированных выборах А и В*).

5. В «лучшем пари для простаков» 0 и 1 равноправны, т. е. выпадают с равной вероятностью при каждом бросании монеты: $P(0)=P(1)= =1/2$. Представьте себе, что монета «фальшивая», т. е. при ее подбрасывании 0 выпадает чаще, чем 1: $P(0)>1/2$. Понятно, что если $P(0)$ близко к 1 (например, $P(0)=0{,}999$), то загадывая слово 00000 из пяти букв, игрок А выигрывает с вероятностью, не меньшей, чем $0{,}999^5>1/2$. Возникает задача: при каких значениях $P(0)$ игрок В продолжает выигрывать в игре с задумыванием слова из l букв? Даже при $l=3$ ответ на этот вопрос неизвестен.

Гипотеза. При любом значении $P(0)$ у В существует выигрышная стратегия при достаточно большой длине загадываемых слов.

---

* В игре трех лиц можно рассмотреть вариант, когда первые два игрока могут организовывать коалиции, т. е. объединяться для борьбы с С.

КТО УПРАВЛЯЕТ ГОРОДОМ МК?

(Путешествие по микрокомпьютеру)

Кандидат технических наук Д. Г. КРУТОГИН

Сегодня нам предстоит посетить архитектурный центр нашего города и одновременно главный производственный район — короче говоря, микропроцессор. Неслучайно мы откладывали этот визит, неслучайно ходили вокруг да около. Сложен для анализа микропроцессор, как сложен архитектурный шедевр. И рассказать о нем не так просто. Можно бы опять нарисовать план, перечислить детали МП, взаимодействие их в работе, но мы сделаем это позже. А начнем с того, что построим в своем воображении простейший микропроцессор (ПМП) из самых необходимых блоков. Если он сможет «работать» (там же, в воображении), то, наверное, его нетрудно будет и немного усложнить, чтобы приблизиться к реальной архитектуре и реальным функциям МП.

Итак, с чего начать? Процессор должен выполнять все арифметические и логические операции. Напомним, всех операций не так уж много: арифметические — сложение с учетом знака (т. е. и вычитание) и умножение (деление) при помощи сдвига двоичного числа вправо — влево на целое число разрядов; логические — «И», «ИЛИ», «НЕ». Эти операции выполнит в нашем ПМП арифметико-логическое устройство, сокращенно — АЛУ. Вот уже это — архитектурная жемчужина города МК и вообще вычислительной техники.

Самый главный работник

АЛУ — это многоразрядный (8, 16, а иногда и больше) набор сумматоров, способный в зависимости от импульсов управления перестраиваться с арифметических на логические действия или наоборот. О работе одноразрядного сумматора «Квант» рассказывал в прошлом году (см. майский номер). А на рисунке 1 можно видеть четырехразрядное (совсем простое) АЛУ. По проводам шины данных на входы A_0 — A_3 и B_0 — B_3 поступают поразрядно операнды A и B, с выходов F_0 — F_3 поразрядно выходят результаты, входы S_0 — S_3 служат для управления АЛУ, переключают его на те или иные операции (сложение, вычитание, отрицание и т. п.).

Глядя на рисунок 1, представьте себе большой лабиринт с прямоугольными переходами. В нем есть восемь входов и четыре выхода; но, в отличие от обычных лабиринтов, в этом лабиринте некто («имя» этого некто УФК, и познакомимся мы с ним немного позднее) то и дело передвигает стенки, меняя конфигурации проходов. В результате АЛУ при разных сигналах управления произведет разные действия с одинаковыми операндами, а на выходе будут разные ответы.

АЛУ работает с огромной, фантастической быстротой; то, что оно может сделать, оно делает за миллионные доли секунды (а самые быстродействующие АЛУ — в сотни раз быстрее). Это его качество очень ценно, и можно сказать, что все остальное, что есть в МК, устроено так, чтобы АЛУ, по возможности, не приходилось ждать.

Откуда же берутся операнды? Обычно из районов ОЗУ или ПЗУ. Но вызвать их оттуда, как правило, можно только по очереди, например, сначала A, потом B. Значит, пока ПМП ожидает появления B, операнд A должен где-то немного подождать. Ближайшей «приемной» служит специальный регистр памяти, называемый аккумулятором. В нем столько же разрядов, сколько в АЛУ. Аккумулятор не только подает один из операндов в АЛУ, он же принимает в себя и результат операции — слово F. Потом аккумулятор переправит это слово в ОЗУ или в какой-то другой регистр памяти внутри процессора, но сначала важно побыстрее освободить АЛУ.

Следующий важный момент — управление. Мы уже отметили, что АЛУ нужно управлять, задавая ему порядок работы. Значит нашему ПМП нужны соответствующие органы управления. (Вот как повернулось дело! Раньше мы отмечали, что всем управляет процессор, а им, оказывается, тоже кто-то управляет.)

«Процессор» для процессора

Устройство управления и формирования команд (обозначим его УФК)

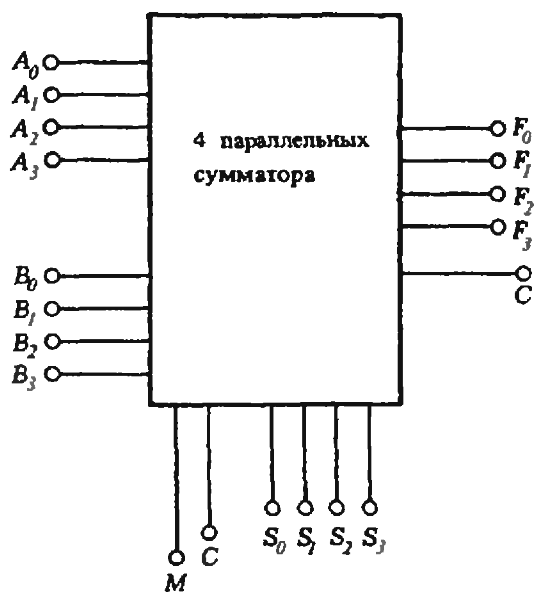


Рис. 1. Схематическое изображение связей четырехразрядного АЛУ. C — указатель сигнала сдвига и переноса разрядов. M — переключатель «арифметика — логика».

занимает в районе ПМП приличный по размерам микрорайон. Задача этого микрорайона: получить очередную команду из текста программы и расшифровать ее до уровня простейших импульсов, подаваемых на входы S_i и M арифметико-логического устройства.

В основном микрорайон УФК застроен логическими устройствами, которые называются дешифраторами. Они и впрямь напоминают шифровальные карты, отверстия которых из самого случайного текста выбирают несколько букв секретного донесения. А роль отверстий выполняют разные варианты подключения элементов дешифратора к шине, несущей текст команды. Хотя элементы застройки типовые — это логические элементы *) И — НЕ, ИЛИ — НЕ, но причудливая их архитектура позволяет реализовать несколько десятков комбинаций, обеспечивающих управление ПМП. Системы УФК управляют не только АЛУ, но и аккумулятором и другими районами МК. Один из кварталов УФК специализирован на обслуживании систем ввода и вывода, он же управляет буферами соответствующих шин в периоды контакта с внешними устройствами. До сотни каналов управления выходит из района УФК.

Следующий вопрос — откуда УФК получает команду для расшифровки? Разумеется, из ЗУ (откуда приходят и операнды). Но на время расшифровки, формирования микрокоманд и их исполнения прибывшая из памяти команда должна располагаться рядом с УФК (быть под рукой), т. е. в специальном регистре памяти — регистре команд (РК). В РК столько же разрядов, сколько в АЛУ и аккумуляторе.

Ясно, что аккумулятор и РК — ближайшая, сверхоперативная память процессора.

Было бы неплохо, если бы внимательный читатель нарисовал сейчас блок-схему описанной выше части ПМП. Два прямоугольничка, один под другим, нужно соединить узким коридором, в котором стоит двунаправленная стрелка — это АЛУ и аккумулятор (А). Ниже расположится прямоугольник чуть большего размера — УФК, стрелки от него идут в АЛУ и аккумулятор. Справа расположите квадратик РК, стрелки от него направлены к блоку УФК. Теперь над аккумулятором нарисуйте маленький, но важный квадратик — буфер (Б), а затем к буферу и регистру команд подведите справа шину данных (для этого на ней придется сделать развилку). Буфер Б (мы раньше сравнили его с постом ГАИ) может пропускать данные от памяти (ОЗУ) в процессор, в другом состоянии — наоборот — от процессора к ОЗУ. Но есть у него и третье состояние, когда он вообще устраняется от обмена данных, как бы «смотрит в небо». В такое состояние буфер «впадает» (конечно, по сигналу УФК!) в то время, когда по шине данных поступает слово-команда. В результате команда оказывается в регистре команд, но никак не в АЛУ. Если теперь вспомнить, что команды и «поселены» были в ОЗУ отдельно от операндов, и вызываются так, чтобы не попасть в арифметико-логическое устройство, станет понятно, как ЭВМ разбирается в командах. Чуть позже мы проверим правильность вашего рисунка, а теперь вернемся к командам. Вот такой вопрос — кто и когда вызывает очередную команду? Эту обязанность выполняет еще один регистр памяти, который называют программным счетчиком, или счетчиком команд (СК).

Этим счетчиком управляет все тот же блок УФК. При начале исполнения программы на счетчик записывается адрес первой по порядку команды. Как только эта команда попала в РК и начала расшифровываться в УФК, счетчик получает сигнал приращения, например на единицу, и тем самым записывает адрес следующей команды (или второй части той же команды, если она длинная).

Та же процедура повторяется со следующей командой и т. д. до команды останова. Но иногда в очередной команде содержится указание для счетчика перейти не к следующей, а к какой-то другой команде, которая далеко впереди (или, наоборот, позади) очередной. Тогда в счет-

*) Конструкции логических элементов рассматривались в февральском номере «Кванта» за 1986 год.

чике устанавливается вновь заказанный адрес, и все продолжается.

Пойди туда, знаю куда; возьми то, знаю что

Мы уже упоминали раньше, что команды на машинном языке не слишком разнообразны, но многие команды содержат адрес ячейки, из которой надо взять операнд, или адрес, в который следует отправить результат. Такие команды в МК не «помещаются» в одно слово, они как бы «тащат» за собой слова-адреса. Но команды попадают в РК, а затем в УФК, а вот адресам там нечего делать. Адреса нужны только для того, чтобы по ним буферное устройство сформировало запрос в память в адресной шине (о ней мы говорили в прошлом номере «Кванта», путешествуя «по столбовым дорогам МК»). На время подготовки запроса и ожидания ответа слова́-адреса размещаются в специальной приемной — регистре адреса памяти (РАП). А для «прочтения» адреса и «составления» запроса используются дешифраторы, такие же как в УФК.

Итак, на схеме ПМП должны появиться еще два регистра сверхоперативной памяти: СК и РАП. (РАП и СК — «адресный стол» нашего города; правда, они хранят не все адреса, а только те, которые нужны для текущей работы.) Кроме этих регистров со специальными функциями, МП обычно содержит еще несколько регистров памяти, не «привязанных» к какой-либо определенной функции. Эти регистры так и называются — регистры общего назначения (РОН). Они имеют объем в одно или два машинных слова и особенно удобны для кратковременного хранения операндов промежуточных вычислений.

Теперь продолжим наш чертеж и все упомянутые регистры (как общие, так и специальные) поместим в левой части рисунка, в виде «этажерки» прямоугольничков. К «этажерке» идут многочисленные стрелки-связи от УФК (это понятно — ведь управлять надо каждым регистром отдельно). А от регистров «этажерки» стрелки идут на буфер адресной шины, через которую микропроцессор обращается и к постоянной, и к оперативной памяти.

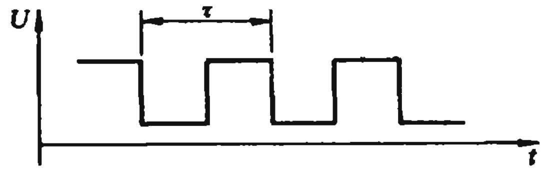


Рис. 2. Импульсы тактового генератора. Период — или такт — в микропроцессорах составляет обычно 0,1—0,5 микросекунды.

Взгляд на часы

Чтобы окончить построение ПМП, нужен еще один, последний, но очень важный элемент. Где-то поблизости от УФК надо изобразить генератор тактовых импульсов — часы нашего города.

Прямоугольные импульсы, или, как их называют, такты, генератора (рисунок 2) используются как эталон единого времени всеми узлами микрокомпьютера. Например, шесть тактов отводится на считывание по частям двухбайтовой команды, три такта — на операцию суммирования и т. п. Паузы между операциями — время для ответа ОЗУ или ПЗУ — тоже отсчитываются тактами генератора.

Тактовым генератором может служить мультивибратор (близкий «родственник» триггера) или другая транзисторная переключающая схема. А чтобы «часы» не убегали и не отставали (при изменении температуры, при других воздействиях), к ним обычно подключают дополнительный кварцевый резонатор с очень высокой стабильностью частоты колебаний, как в обычных (уже обычных!) электронных часах.

Вот теперь пора проверить готовый чертеж ПМП (см. рисунок 3). За границы рисунка уходят: шина адресная, шина данных (двунаправленная), шина управления памятью и вводом — выводом, а также линии связи с внешними устройствами, цепи питания и т. п. О работе этих узлов мы говорили ранее. Какие же архитектурные элементы нам чаще всего встречались в ПМП?

Регистры оперативной памяти в аккумуляторе, РК, «этажерке» РОН, РАП, СК. Как видите, роль их в структуре процессора существенна.

Логические схемы сумматора в АЛУ.

Логические схемы дешифратора в УФК и буферных схемах шин.

Внутренние шины связи между отдельными элементами процессора.

Конечно, реальный микропроцессор намного сложнее нашего простого. В нем появляется еще несколько важных регистров специализированного назначения, предусматривается возможность прерывания программы и возврата к ней, а также разных способов обращения к памяти. Общую сложность структуры МП можно оценить, если вспомнить, что за каждым регистром, сумматором или дешифратором стоят десятки, а то и сотни транзисторов, а во всем микропроцессоре их десятки или сотни тысяч.

Но давайте взглянем на микропроцессор не с архитектурной, а с функциональной точки зрения. Что делает он в микроЭВМ, что делает процессор в больших ЭВМ? Для чего вообще нужен процессор?

Робот-лифтер

В январском номере «Кванта» за прошлый год в статье «Элементарные логические операции» был рассмотрен пример управления лифтами: многоэтажный дом, один или несколько лифтов, на каждом этаже одна кнопка вызова. Лифтами управляет командный аппарат. В ответ на многообразие возможных задач-ситуаций аппарат выдает одно из трех решений: вверх, вниз, стоп (если лифта два, то независимых решений $2\times3=6$). Решения приготовлены заранее и существуют в виде схемы электрических соединений обычных выключателей или реле. Эти соединения можно описать логическими операциями (см. рисунок 4, *а*): если включена кнопка «э10» (этаж) ИЛИ «э9» (и т. д.) И (при этом!) включена кнопка «л12» (пустой лифт стоит на 12 этаже) И НЕ включена кнопка «стоп1» (перегруз!) И НЕ включена кнопка «стоп2» (открыты двери!), то решение задачи — ВНИЗ. А иначе — СТОП. Лифт при движении нажимает на контакты поэтажных выключателей, схема соединений меняется, и перед десятым этажом включается НЕ «л10», т. е. СТОП (рисунок 4, *б*).

Таким образом, командоаппарат запоминает и сравнивает команды-вызовы, операнды-текущее состояние, команды-запреты (они вообще превыше всех других!), а потом выдает команду-ответ. Каждая команда легко представима: 1 — кнопка нажата, 0 — кнопка отпущена. Это привычный нам двоичный код.

Процессор (или микропроцессор) — многократно усложненный командоаппарат, сжатый в размерах до нескольких квадратных миллиметров микросхемы. У него в запасе не три, а более сотни вариантов решений, он сопоставляет множество данных,

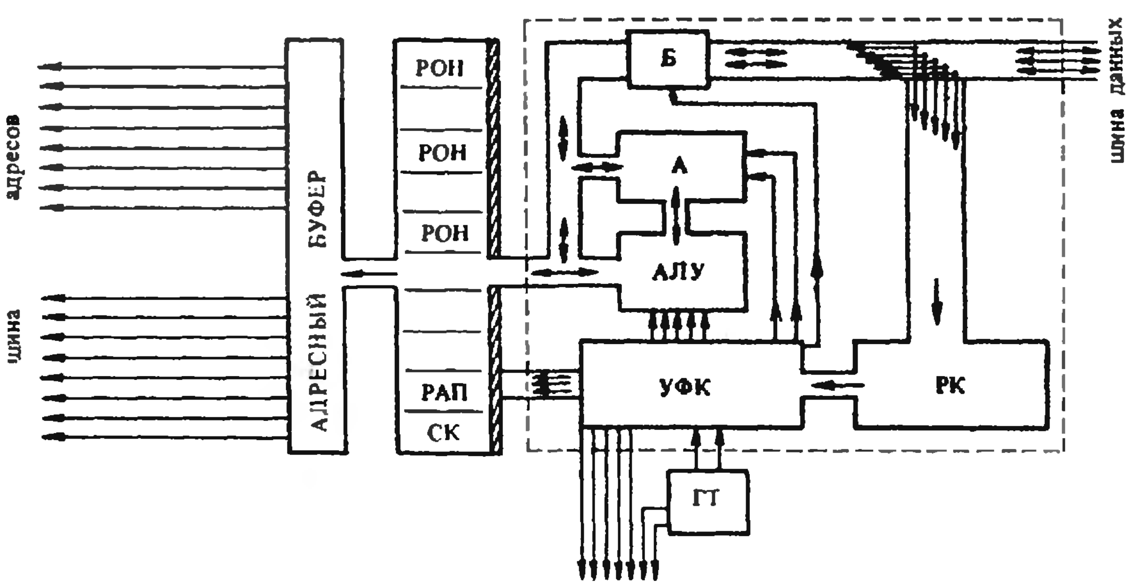


Рис. 3. Схема простейшего микропроцессора. Розовой плашкой выделена основная часть схемы, с которой мы начинали «строительство».

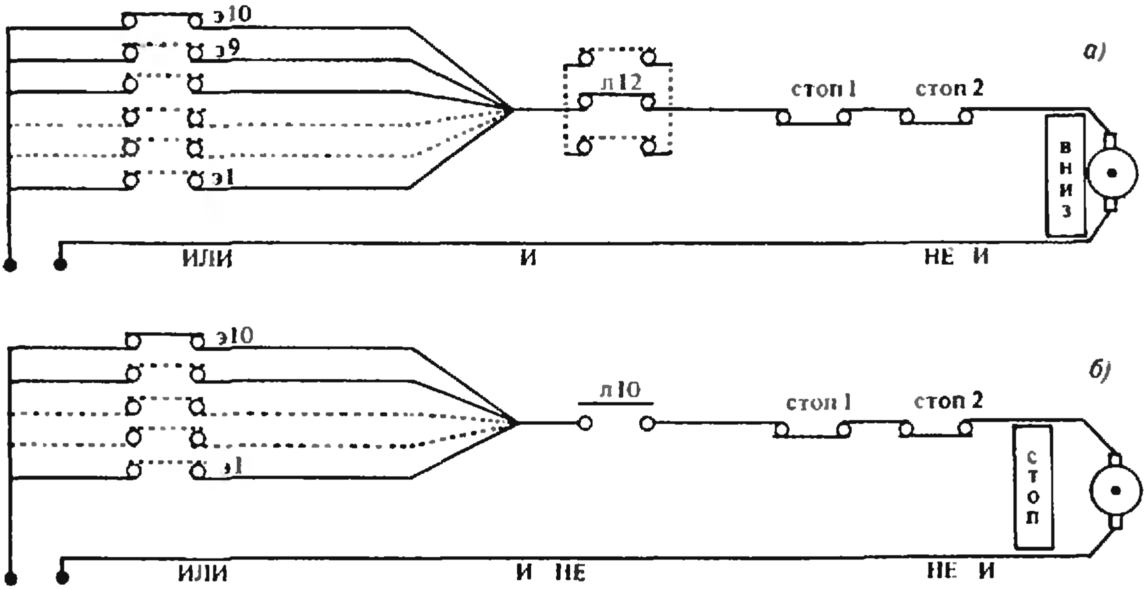


Рис. 4. Логика управления лифтом.

десятки запретов. Свои ответы процессор посылает в сотни и тысячи разных адресов. Словом, он намного мощнее скромного командоаппарата по скорости и по возможностям, но по смыслу действий и по функциям — он тоже командоаппарат! Варианты решений (микрокоманды), которыми пользуется микропроцессор, записаны в постоянной памяти блока УФК. Поэтому, заканчивая путешествие по городу Микрокомпьютеру, уместно сравнить микропроцессор с административно-культурным районом, а устройствам управления и формирования команд (УФК) придать статус горисполкома (оперативное текущее руководство жизнью города).

Вместо заключения

Задачи городского совета, т. е. определение общих целей, перспектив, порядка исполнения работ, выполняет программа, которую ввели в МК пользователи, т. е. мы с вами. Следовательно, при всем совершенстве конструкции ЭВМ и МК не содержат в себе творческого начала, его вкладывает в них человек, вкладывает в виде постоянных или заменяемых программ.

Чего же мы не увидели в городе МК из того, что полагается увидеть экскурсантам? Нет здесь памятника основателям и первостроителям города. В предельной тесноте и рациональности нашего города ему нет места. Но если бы он был, то на его вершине стоило бы отвести почетное место трем ученым: Майклу Фарадею — физику, первым отметившему особые свойства полупроводников, Чарльзу Бэббеджу — первому «архитектору» и строителю вычислительных машин, Джорджу Булю — математику, изобретателю алгебры логики — науки, на которой основана схемотехника ЭВМ. Эти три человека могли быть знакомы, ибо жили в Англии примерно в одно время.

Второй ярус памятника должен бы вместить десятки крупных ученых: от Д. Менделеева и Н. Бора, Я. Френкеля и В. Шоттки до изобретателей транзистора — Дж. Бардина и У. Браттейна.

В третьем ярусе памятника достойны поместиться тысячи инженеров из разных стран, представители нескольких поколений физиков, химиков, математиков, металлургов, технологов, радиоинженеров, конструкторов, чьим трудом и талантом создан микроскопический и прекрасный город. Собственно, он и есть лучший памятник их вдохновенной работе.

Задачник „Кванта"

Задачи

М1041 — М1045; Ф1053 — Ф1057

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 1 августа 1987 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 5—87» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1041» или «Ф1053». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М1041—М1045 предлагались на 50-й Московской городской математической олимпиаде в 1987 году.

М1041. На плоскости заданы а) четыре, б) три вершины правильного пятиугольника. С помощью двусторонней линейки восстановите остальные его вершины. (Двусторонней линейкой можно делать то же, что и обычной линейкой без делений, а также проводить прямую, параллельную данной, на расстоянии, равном ширине линейки.)

М. И. Гринчук

М1042. В классе организуется турнир по перетягиванию каната. В турнире ровно по одному разу должны участвовать всевозможные команды, которые можно составить из учащихся этого класса (из одного, двух и т. д. человек, кроме команды всего класса). Докажите, что каждая команда будет соревноваться с командой, состоящей из всех остальных учеников класса.

И. Н. Сергеев

М1043. Можно ли разбить множество всех целых чисел на три подмножества так, чтобы для любого целого n числа n, $n-50$, $n+1987$ принадлежали трем разным подмножествам?

С. В. Конягин

М1044. Докажите, что из четырех чисел всегда можно выбрать два числа x и y, такие что

$$0 \leqslant \frac{x-y}{1+xy} \leqslant 1.$$

И. Н. Сергеев

М1045. В некотором царстве, некотором государстве, территория которого имеет форму квадрата со стороной 2 км, царь решает созвать всех жителей к 7 часам вечера к себе во дворец на бал. Для этого он в полдень посылает с поручением гонца, который может передать любое указание любому жителю, который в свою очередь может передать любое указание любому другому жителю и т. д. Каждый житель до поступления указания находится у себя дома (в известном месте) и может передвигаться со скоростью 3 км/ч в любом направлении. Докажите, что царь может организовать оповещение так, чтобы все жители успели придти к началу бала.

С. В. Конягин

Ф1053. В тонком гладком трубопроводе скользит (в поле силы тяжести) гибкий однородный шнур (рис. 1). Участки AB и BC трубопровода представляют собой полуокружности радиусом R, точки A, B и C лежат на одной вертикали; длина шнура $l=2\pi R$. Найти все точки шнура, в которых натяжение равно нулю в тот момент, когда нижний конец шнура находится в точке C.

И. Ю. Потеряйко

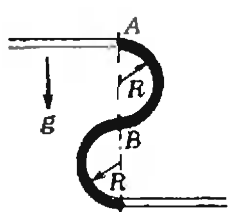


Рис. 1.

Ф1054. Два стержня одинаковой формы сделаны из материалов с разными упругими свойствами — модули Юнга материалов равны соответственно E_1 и E_2. Стержни склеены торцами и покрашены одной краской, так что получившийся образец выглядит как однородный стержень. Какой модуль Юнга «вещества» этого стержня измерит экспериментатор, не знающий, что стержень составной?

В. А. Давыдов

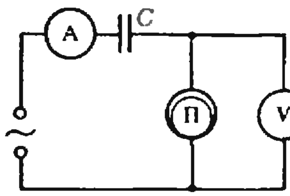


Рис. 2.

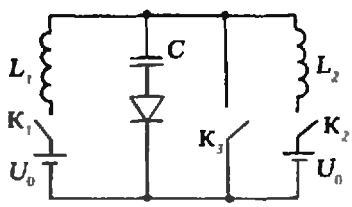


Рис. 3.

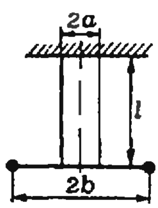


Рис. 4.

Ф1055. Электрический прибор П подключен к сети переменного тока с напряжением 220 В через конденсатор емкостью $C=0{,}5$ мкФ (рис. 2). Амперметр показывает ток $I=0{,}01$ А, показание вольтметра — $U=180$ В. Найти мощность, потребляемую от сети прибором. Считать амперметр и вольтметр идеальными.

А. Р. Зильберман

Ф1056. В схеме, изображенной на рисунке 3, ключ K_3 сначала замкнут, а ключи K_1 и K_2 разомкнуты. В некоторый момент времени замыкают ключ K_1, а спустя время $t_1=0{,}1$ с замыкают ключ K_2. Еще через время $t_2=0{,}2$ с размыкают ключ K_3. Найти: 1) максимальное напряжение на конденсаторе; 2) ток через катушку L_1 через время $t_3=1$ с после замыкания ключа K_1. Сопротивлением проводов пренебречь, диод считать идеальным; $L_1=1$ Гн, $L_2=0{,}5$ Гн, $C=10$ мкФ, $U_0=10$ В.

А. Р. Зильберман

Ф1057. Гантель, состоящая из двух шариков массой m каждый, закрепленных на концах легкого стержня длиной $2b$, подвешена в горизонтальном положении на двух нерастяжимых нитях длиной l, расстояние между которыми $2a$ (рис. 4). Найти период малых крутильных колебаний гантели.

М. М. Цыпин

Problems

M1041 — M1045; P1053 — P1057

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in Englich) may be posted no later than August 1st 1987, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics prohlems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies

M1041. Let a) four, b) three vertices of a regular pentagon in the plane be given. Construct the other vertices by means of a two—sided ruler. (A two—sided ruler does anything a one—sided unmarked ruler can do and can also be used to draw a line parallel to a given one at the distance equal to the ruler's width.)

M. I. Grinchuk

M1042. A tug-of-war competition is organized among the pupils of a certain class. Every possible team which can be made up of one, two, etc. pupils (but not the entire class) must participate exactly once. Prove that each team will compete against the team consisting of all the other pupils of the class.

I. N. Sergeev

M1043. Can the set of all integers be partitioned into three subsets so that for any integer n the numbers n, $n-50$, $n+1987$ will belong to three different subsets?

S. V. Konyagin

M1044. Prove that out of any four positive numbers it is always possible to choose two numbers x and y such that

$$0\leqslant\frac{x-y}{1+xy}\leqslant 1.$$

I. N. Sergeev

M1045. Once upon a time the King of a small square Kingdom of side 2 km decided to invite all his subjects to a Ball at the Court at 7 PM. At noon he dispatched a Messenger who could transmit any message to any inhabitant of the Kingdom, who in turn could transmit any message to any other inhabitant, etc. Each inhabitant stays at his house (whose location is known) until he gets a message and then walks at 3 km per hour in the required direction. Prove that the King could have organized the transmission of messages so that all his loyal suhjects could reach the Court in time for the Opening of the Ball.

S. V. Konyagin

(in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS. Problems M1041—M1045 from this issue were proposed at the 50th Moscow Mathematics Olympiad.

P1053. A uniform elastic string slides inside a smooth pipe (in the Earth's gravitational field). The sections AB and BC of the pipe are semicircles of radius R, the points A, B, C are on the same vertical (see figure Рис. 1), the length of the string is $l=2\pi R$. Find all the points of the string where the tension is zero at the moment when the string's lower extremity is at the point C.

I. Yu. Poteryaiko

P1054. Two rods of identical shape are made from materials with different elasticity properties: Young's modulus of the material equals E_1 and E_2 respectively. The rods are glued together end to end and covered with a coat of the same paint, so that the sample obtained looks like a uniform rod. What value of Young's modulus for the "material" constituting the rod will be measured by the unsuspecting experimentator, who is unaware that the rod is not uniform?

V. A. Davydov

P1055. The electric apparatus П is connected to a source of alternating current of 220 V via a capacitor of $C=0.5$ μF (see figure Рис. 2). The ammeter shows a current of $I=0.01$ A, the woltmeter shows $U=180$ V. Find the power from the source used by the apparatus. The ammeter and voltmeter are assumed ideal.

A. R. Zilberman

P1056. In the circuit shown on figure Рис. 3 the switch K_3 is turned on at first, while the switches K_1 and K_2 are turned off. At a certain moment K_1 is switched on, and in $t_1=0.1$ seconds later so is K_2. In another $t_2=0.2$ seconds K_3 is switched off. Find: 1) the maximal tension on the capacitor; 2) the current through the coil L_1 in time $t_3=1$ s after the switch K_1 was turned on. The resistance of the wires may be neglected, the diodes assumed ideal; $L_1=1$ H, $L_2=0.5$ H, $C=10$ μF, $U_0=10$ V.

A. R. Zilberman

P1057. A weight for bodybuilding, consisting of two solid spheres of mass m each joined by a light rod of length $2b$, hangs horizontally on two inelastic wires of length l whose distance is $2a$ (see figure Рис. 4). Find the period of small rotational oscillations of the weight.

M. M. Tsypin

Решения задач

М1021 — М1025; Ф1033 — Ф1037

М1021. *Альпинист хочет подняться на скалу высотой 1000 м. После ночевки в лагере у подножья скалы он может подниматься, навешивая веревку, со скоростью 40 метров в час, а после холодной ночевки на скале — 30 метров в час. По готовой веревке он поднимается со скоростью 400 метров в час. За сколько дней он сможет достичь вершины, если будет работать на скале (включая подъем по веревке) 6 часов в день? (Временем спуска и других операций пренебречь.)*

Ответ: за пять дней.

Обозначим через x_n наибольшую высоту, до которой альпинист может подняться за n дней ($n=1, 2, \ldots$). Если к концу какого-то дня он достиг высоты h метров, на следующий день он может подняться на высоту $h+6\cdot 30=h+180$ метров, если будет ночевать на скале, и на высоту $h+\left(6-\frac{h}{400}\right)40=h+240-h/10$ метров, если спустится ночевать вниз. Ясно, что первый вариант выгоднее, если $180>240-h/10$, то есть $h>600$, второй — если $h\leqslant 600$. Таким образом,

$$x_{n+1}=\begin{cases} x_n+240-x_n/10, & \text{если } x_n\leqslant 600, \\ x_n+180, & \text{если } x_n\geqslant 600. \end{cases}$$

n	x_n
1	240
2	456
3	650,4
4	830,4
5	1010,4
...	...

Начав с $x_0=0$, можно определить x_n последовательно для всех n. Поскольку $x_4<1000$, а $x_5>1000$, альпинист сможет достичь вершины скалы к концу 5-го дня; для этого он должен первые две ночевки провести внизу, а последние две — на скале.

Н. Б. Васильев

М1022. *Первые 8 натуральных чисел можно расставить в две строки (рис. 1) так, что сумма чисел в верхней строке равна сумме чисел в нижней, а суммы чисел в столбцах также равны между собой. Можно ли расставить подобным образом первые: а) десять, б) двенадцать натуральных чисел?*

в) при каких натуральных n можно расставить таким образом числа от 1 до $2n$?

8	2	3	5
1	7	6	4

Рис. 1.

1	11	3	9	8	7
12	2	10	4	5	6

Рис. 2.

Ответ: а) нельзя, б) можно (рис. 2), в) можно при четных $n\geqslant 4$.

Рассмотрим сразу общий случай (задача в)). Сумма всех чисел от 1 до $2n$ должна быть четной (только тогда их можно разбить на две группы с равными суммами). Поскольку $1+2+...+2n=n(2n+1)$, число n не может быть нечетным; отсюда же следует, что суммы по столбцам должны равняться $2n+1$.

Пусть $n=2k$. Выпишем в первой строке числа от 1 до $2k$, а под ними — числа, дополняющие их до $2n+1=4k+1$:

$$\begin{array}{llllll} 1 & 2 & 3 & \dots & 2k-1 & 2k \\ 4k & 4k-1 & 4k-2 & \dots & 2k+2 & 2k+1. \end{array}$$

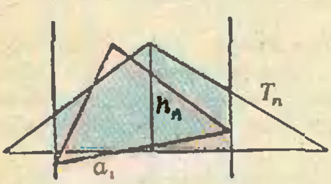
Сумма нижних чисел равна $(1+2+...+2k)+2k\cdot 2k$, т. е. на $4k^2$ больше суммы верхних чисел. Следовательно, мы должны переставить в нескольких столбцах верхнее число вниз, а нижнее — вверх так, чтобы в итоге верхняя сумма увеличилась на $2k^2$ (а нижняя на столько же уменьшилась). Заметим, что m-е слева число верхней строки на $2k$ меньше m-го справа числа нижней строки для всех $m=1, 2, ..., 2k$, поэтому, если переставить одновременно числа в двух столбцах, равноотстоящих от краев таблицы, верхняя сумма возрастет на $4k$. При четном k такую перестановку достаточно проделать для $k/2$ симметричных пар столбцов: верхняя сумма возрастет на $4k\cdot k/2=2k^2$. При нечетном $k\geqslant 3$ переставим верхние числа $k+1$ и $2k$ с соответствующими нижними — $3k$ и $2k+1$, а также еще числа $(k-1)/2$ симметричных пар столбцов. Мы снова получим нужное увеличение верхней суммы:

$$3k-(k+1)+(2k+1)-2k+4k\cdot (k-1)/2=2k^2.$$

Наконец, при $k=1$ нужной расстановки, очевидно, не существует.

М. Н. Штеренберг

М1023. *Всегда ли из 100 треугольников найдется хотя бы один такой, что его можно целиком покрыть остальными 99?*



Ответ: не всегда. Покажем, что существует даже бесконечная последовательность треугольников $T_1, T_2, ...$, ни один из которых нельзя покрыть остальными.

Эта последовательность строится по следующему принципу. Сначала определим последовательность a_n длин наибольших сторон треугольников T_n так, чтобы при любом наложении треугольников $T_1, T_2, ..., T_{n-1}$ на T_n оставалась непокрытой фиксированная (не зависящая от n) доля площади треугольника T_n, — это можно обеспечить выбором a_n, достаточно большого по сравнению с $a_1, ..., a_{n-1}$. Затем надо подобрать последовательность площадей S_n треугольников T_n так, чтобы суммарная площадь треугольников $T_{n+1}, T_{n+2}, ...$ была меньше площади непокрытой части треугольника T_n, — этого можно добиться за счет достаточно быстрого убывания последовательности площадей.

Приведем пример одной из таких последовательностей треугольников. Пусть T_1 — правильный треугольник со стороной $a_1=1$; T_n при $n>1$ — равнобедренный треугольник с основанием $a_n=4^{n-1}$ и площадью $S_n=S_1/4^{n-1}$, где $S_1=\sqrt{3}/4$ — площадь треугольника T_1 (высота h_n треугольника T_n равна $2S_n/a_n=2\sqrt{3}/4^{2n-1}$). Рассмотрим треугольники $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Каждый из треугольников T_i, $1\leqslant i\leqslant n-1$, помещается в полосе ширины не больше a_i, перпендикулярной основанию треугольника T_n (см. рисунок). Площадь, покрываемая этой полосой в T_n, меньше $a_i\cdot h_n$, поэтому суммарная площадь, покрываемая треугольниками $T_1, \ldots, T_{n-1}$ в T_n меньше $(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})h_n$ (эта оценка очень грубая, но ее нам вполне хватит). Поскольку

$$a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}=\frac{1}{3}(4^{n-1}-1)<\frac{1}{3}a_n,$$

покрытая площадь треугольника T_n меньше $a_nh_n/3=2S_n/3$, а значит, больше трети площади T_n остается непокрытой. В то же время

$$S_{n+1}+S_{n+2}+\ldots=$$

$$=S_1\left(\frac{1}{4^n}+\frac{1}{4^{n+1}}+\ldots\right)=\frac{S_1}{4^n(1-1/4)}=\frac{1}{3}\frac{S_1}{4^{n-1}}=\frac{1}{3}S_n.$$

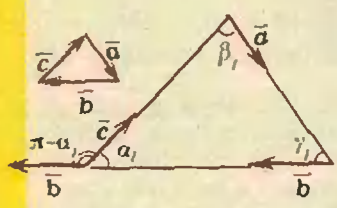
Следовательно, треугольниками $T_1, \ldots, T_{n-1}, T_{n+1}, T_{n+2}, \ldots$ нельзя покрыть весь треугольник T_n.

Г. А. Гуревич

M1024*. *Докажите, что для любых двух треугольников с углами α, β, γ и α_1, β_1, γ_1 выполнено неравенство*

$$\frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha}+\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta}+\frac{\cos\gamma_1}{\sin\gamma}\leqslant$$

$$\leqslant\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma.$$



Фиксируем α, β, γ. Мы должны доказать, что наибольшее значение левой части рассматриваемого неравенства как функции от α_1, β_1, γ_1 при $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=\pi$ достигается, когда $\alpha_1=\alpha$, $\beta_1=\beta$, $\gamma_1=\gamma$. Умножая левую часть на $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$, придадим ей вид

$$\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha_1+\sin\gamma\sin\alpha\cos\beta_1+\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma_1=A.$$

Это выражение можно истолковать как сумму (взятую со знаком минус) трех попарных скалярных произведений векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ длин $a=\sin\alpha$, $b=\sin\beta$, $c=\sin\gamma$, направленных по сторонам треугольника с углами α_1, β_1, γ_1 (см. рисунок):

$$A=-(\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{c}\cdot\bar{a}+\bar{a}\cdot\bar{b})=$$

$$=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2-(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})\cdot(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})),$$

поскольку $bc\cos\alpha=-\bar{b}\cdot\bar{c}$ и т. д. Очевидно, что наибольшее значение эта величина принимает, когда $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$, т. е. из векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ можно составить треугольник. Углы этого треугольника равны α_1, β_1, γ_1, а противолежащие им стороны — $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$; по теореме синусов получаем, что $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$, $\gamma=\gamma_1$.

Р. П. Ушаков

M1025*. *Две прямые, проведенные через одну и другую точку пересечения продолжений противоположных сторон выпуклого четырехугольника, разрезают его на четыре меньших четырехугольника. Докажите, что если в два их них, не имеющие общей*

Известно, что в четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны. Оказывается, имеются еще два аналогичных признака, которые и используются в решении задачи.

Пусть стороны AB и DC четырехугольника $ABCD$ при продолжении пересекаются в точке E, AD и BC — в точке F (рис. 1). Тогда для существования вписанной в четырехугольник $ABCD$ окружности необходимо и достаточно выполнение любого из следующих *стороны, можно вписать окружности, то и в исходный четырехугольник можно вписать окружность.*

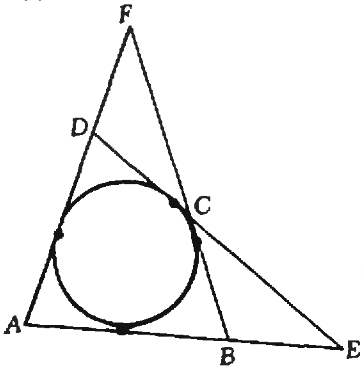


Рис. 1.

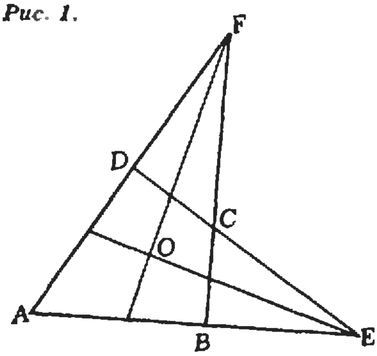


Рис. 2.

двух условий:

$$EB+FB=ED+FD, \qquad (1)$$
$$EA-FA=EC-FC. \qquad (2)$$

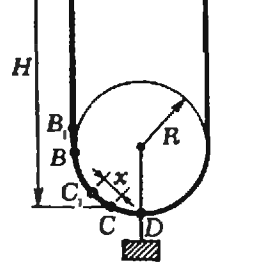
Докажем их необходимость. Пусть a, b, c, d, e, f — длины касательных, проведенных из точек A, B, C, D, E, F к вписанной в $ABCD$ окружности. Тогда $EB=e-b$, $FB=f+b$, $ED=e+d$, $FD=f-d$, так что обе части равенства (1) равны $e+f$. Аналогично доказывается, что обе части равенства (2) равны $e-f$.

Докажем достаточность условия (1). Пусть оно выполнено. Впишем в треугольник AED окружность и проведем к ней из точки F касательную, пересекающую EA и ED в точках B_1 и C_1. Из доказанного выше следует, что $EB_1+FB_1=ED+FD=EB+FB$, т. е. $FB=FB_1+(EB_1-EB)=FB_1\pm BB_1$ (знак зависит от того, с какой стороны от B лежит точка B_1). Полученное равенство при $B_1\neq B$ противоречит неравенству треугольника для точек F, B и B_1. Следовательно, $B_1=B$ — построенная окружность касается и четвертой стороны BC данного четырехугольника. Достаточность условия (2) устанавливается аналогично.

Теперь легко доказать утверждение задачи. Пусть O — точка пересечения прямых, разрезающих данный четырехугольник $ABCD$ (рис. 2). Если окружности можно вписать в четырехугольники при вершинах B и D, то в силу условия (1) для этих четырехугольников $EB+FB=EO+FO=ED+FD$; применяя условие (1) к $ABCD$, получаем, что и в этот четырехугольник можно вписать окружность. Для четырехугольников при вершинах A и C утверждение задачи по признаку (2) вытекает из равенств $EA-FA=EO-FO=EC-FC$.

И. Ф. Шарыгин

Ф1033. *Через блок радиусом R перекинут однородный гибкий канат массой m и длиной l, прикрепленный к двум крюкам на потолке, расположенным на расстоянии $2R$ (см. рисунок). На оси блока висит груз, масса которого вместе с блоком M. Трение между канатом и блоком отсутствует. Найти минимальную силу натяжения каната.*



Рассмотрим левую половину каната ABD (см. рисунок). Ясно, что чем ниже на участке AB точка каната, тем меньше в этой точке сила натяжения. Поэтому точку каната с минимальным натяжением надо искать где-то на участке BD. Возьмем произвольную точку C на этом участке, находящуюся на расстоянии H от потолка.

На участок каната ABC действует направленная вертикально вверх сила F_1 со стороны крюка, сила натяжения каната F в точке C (со стороны расположенной справа от точки C части каната), а также силы давления блока на канат, рассредоточенные по всей поверхности соприкосновения каната с блоком.

Переместим мысленно участок каната ABC на сколь угодно малое расстояние x таким образом, чтобы он занял новое положение $A_1B_1C_1$ (см. рисунок). При таком перемещении сила F_1 совершит работу F_1x, а сила F совершит отрицательную работу $-Fx$. Силы давления блока на канат работы не совершат (в каждой точке каната они направлены перпендикулярно направлению перемещения этой точки). Потенциальная энергия перемещенного участка каната увеличится при этом на ту же величину, на какую увеличится потенциальная энергия кусочка каната длиной x и массой $\frac{m}{l}x$ при перенесении его из положения CC_1 в положение AA_1. По закону сохранения энергии

$$F_1x-Fx=\frac{m}{l}xgH.$$

Отсюда

$$F=F_1-\frac{m}{l}\,xgH. \qquad (1)$$

Теперь видно, что минимальное значение F на участке BD будет при максимально возможном значении H, т. е. в точке D. Равенство (1) для точки D имеет вид

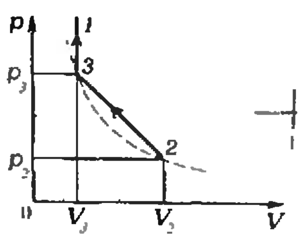
$$F_{\min}=F_1-\frac{m}{l}\,g\left(\frac{l}{2}-\frac{\pi R}{2}+R\right).$$

Так как $F_1=\frac{1}{2}(M+m)g$, что легко показать, то минимальная сила натяжения каната равна

$$F_{\min}=\frac{Mg}{2}+\frac{mg}{2}\,\frac{R}{l}(\pi-2)=\left(M+m(\pi-2)\frac{R}{l}\right)\frac{g}{2}.$$

В. И. Чивилев

Ф1034. *Моль идеального газа из начального состояния 1 с температурой $T_1=100$ К, расширяясь через турбину в пустой сосуд, совершает некоторую работу и переходит в состояние 2 (см. рисунок). Этот переход происходит без подвода либо отвода тепла. Затем газ сжимают в процессе 2→3, в котором давление является линейной функцией объема, и наконец, в изохорическом процессе 3→1 газ возвращается в исходное состояние. Найти работу, совершенную газом при расширении через турбину в переходе 1→2, если в процессах 2→3→1 к газу в итоге подведено $Q=72$ Дж тепла. Известно также, что $T_2=T_3$, $V_2=3V_1$; газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль·К).*



При расширении газа через турбину в пустой сосуд он совершает работу за счет своей внутренней энергии (так как подвода тепла нет). В процессе такого перехода отдельные части газа могут иметь разные температуры и давления — это так называемое «неравновесное» расширение. Однако после установления в газе равновесной температуры T_2 и давления p_2 совершенная газом работа однозначно определяется законом сохранения энергии:

$$A_{1\to 2}=c_V(T_1-T_2),\ \text{где}\ c_V=\frac{3}{2}R.$$

На участке 2→3 начальная внутренняя энергия газа равна конечной, поэтому подведенное к газу тепло $Q_{2\to 3}$ определяется совершенной газом работой (площадь трапеции):

$$Q_{2\to 3}=A_{2\to 3}=\frac{p_2+p_3}{2}(V_3-V_2)=RT_2\frac{1-\alpha^2}{2\alpha},\ \text{где}\ \alpha=\frac{V_2}{V_3}=3.$$

На участке 3→1 подведенное к газу тепло определяется изменением его внутренней энергии, так как в изохорическом процессе работа газом не совершается:

$$Q_{3\to 1}=c_V(T_1-T_3)=c_V(T_1-T_2).$$

По условию $Q_{2\to 3}+Q_{3\to 1}=Q\neq 72$ Дж, или

$$RT_2\frac{1-\alpha^2}{2\alpha}+c_V(T_1-T_2)=Q.$$

Последнее равенство позволяет найти температуру T_2, а затем и работу $A_{1\to 2}$:

$$A_{1\to 2}=\frac{Q+RT_1\dfrac{\alpha^2-1}{2\alpha}}{1+\dfrac{R}{c_V}\,\dfrac{\alpha^2-1}{2\alpha}}=625\ \text{Дж}.$$

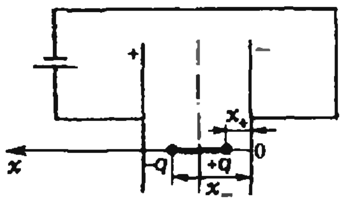
А. А. Шеронов

Ф1035. *Электрический диполь из двух жестко связанных точечных зарядов $+q$ и $-q$, расположенных на расстоянии l друг от друга, пролетает плоский конденсатор, пластины которого подключены к источнику с постоянной ЭДС $\mathscr{E}$ (см. рисунок). Опре-*

Прежде всего следует отметить, что диполь будет «втягиваться» в конденсатор — результирующая сила, действующая на него со стороны пластин, направлена внутрь конденсатора, и следовательно, в конденсаторе скорость диполя возрастает.

Так как поле в конденсаторе поддерживается постоянным, можно пренебречь влиянием поля диполя на заряды пластин, т. е. считать поле конденсатора внешним (независимым) по отношению к диполю.

делите скорость диполя в центре конденсатора, если известно, что его скорость вдали от конденсатора равна v_0. Расстояние между пластинами конденсатора d, масса диполя m. Влиянием силы тяжести пренебречь.



Поле конденсатора — потенциальное; следовательно, в конденсаторе диполь будет обладать и потенциальной энергией. Эта энергия равна

$$W_п = (+q)\varphi_{x+} + (-q)\varphi_{x-} = q\frac{\mathcal{E}}{d}(x_+ - x_-) = -ql\frac{\mathcal{E}}{d},$$

где x_+ и $x_- = x_+ + l$ — координаты зарядов $+q$ и $-q$, φ_{x+} и φ_{x-} — потенциалы в точках с координатами x_+ и x_-; координата x отсчитывается от отрицательно заряженной пластины (см. рисунок). При таком выборе начала отсчета работа по перемещению единичного заряда с отрицательной пластины на положительную равна $\mathcal{E}$.

Искомую скорость диполя найдем из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - ql\frac{\mathcal{E}}{d},$$

откуда

$$v = \left(v_0^2 + \frac{2ql\mathcal{E}}{md}\right)^{1/2}.$$

А. В. Шелагин

Ф1036. *К телу массой $m = 20$ г, лежащему на гладком горизонтальном полу, привязаны две одинаковые упругие нити жесткостью $k = 10^4$ Н/м. Одна нить приклеплена к стене, свободный конец второй нити начинают тянуть в горизонтальном направлении со скоростью $v = 10$ м/с. Какая нить порвется, если разрыв каждой нити происходит при абсолютном удлинении $\Delta l_{пр} = 5$ см? Считать, что закон Гука выполняется для нитей вплоть до их разрыва; трения нет.*

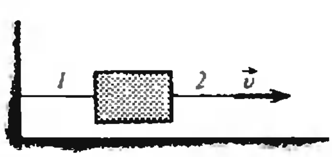


Рис. 1.

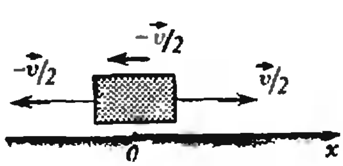


Рис. 2.

За процессом растяжения нитей удобно следить, перейдя из неподвижной системы (рис. 1) в систему координат, двужущуюся вправо со скоростью $v/2$; начало отсчета в первый момент времени совпадает с телом (рис. 2).

Относительно этой системы координат концы нитей движутся в разные стороны со скоростями $v/2$; тело в первый момент времени находится в начале координат ($x = 0$) и движется влево со скоростью $v/2$.

Сила упругости, действующая на тело, не зависит от движения концов нитей, а зависит лишь от смещения тела x от первоначального положения:

$$F_x = -k(\Delta l + x) + k(\Delta l - x) = -2kx,$$

где $\Delta l = (v/2)t$ — абсолютное значение смещений концов нити к тому моменту, когда смещение тела равно x. Следовательно, тело будет совершать гармонические колебания с частотой $\omega = \sqrt{2k/m} = 10^3$ Гц около первоначального положения. Смещение тела меняется со временем по закону

$$x = -\frac{v}{2\omega}\sin\omega t,$$

а удлинения нитей —

$$\Delta l_1 = \frac{v}{2}t - \frac{v}{2\omega}\sin\omega t,$$

$$\Delta l_2 = \frac{v}{2}t + \frac{v}{2\omega}\sin\omega t.$$

Отсюда видно, что в течение четных полупериодов колебаний —

$$2n\frac{T}{2} < t < (2n+1)\frac{T}{2} \quad \left(T = \frac{2\pi}{\omega},\ n = 0, 1, 2, \ldots\right)$$

— сильнее будет растянута первая нить, в течение нечетных полупериодов — вторая.

Таким образом, вторая нить порвется, если выполняется условие

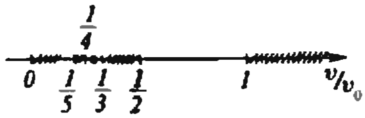


Рис. 3.

$$2n\frac{T}{2}\frac{v}{2}<\Delta l_{пр}<(2n+1)\frac{T}{2}\frac{v}{2},$$

или

$$\frac{1}{2n+1}<\frac{v}{v_0}<\frac{1}{2n}, \text{ где } v_0=2\omega\cdot\Delta l_{пр}/\pi.$$

Область скоростей (точнее, отношение v/v_0), при которых рвется вторая нить, на рисунке 3 показана штриховкой. При больших скоростях, т. е. когда $v/v_0>1$, всегда рвется та нить, за которую тянут; при меньших скоростях ответ неоднозначен.

Для приведенных в условиях данных $v/v_0=0{,}314$. Следовательно, порвется нить, привязанная к стене.

Е. П. Соколов

Ф1037. *В полой сфере проделано маленькое отверстие, через которое внутрь проникает узкий параллельный пучок света. Внутренняя поверхность сферы отражает свет во все стороны одинаково (диффузно) и не поглощает его. Как будут различаться в этом случае освещенности в точке, диаметрально противоположной отверстию, и во всех остальных точках сферы?*

Поскольку по условию задачи внутренняя поверхность сферы не поглощает падающую на нее световую энергию, после многократных отражений через некоторое время в системе установится равновесие. При этом каждый небольшой участок внутренней поверхности сферы всю попадающую на него световую энергию будет равномерно рассеивать во все стороны. В результате установления равновесия освещенность всех внутренних точек сферы, кроме точки, противоположной отверстию, будет одинаковой. При равновесии суммарная световая энергия, приходящая к отверстию в единицу времени от всех внутренних точек сферы, будет равна энергии, поступающей через отверстие в сферу извне. Таким образом, после установления равновесия (а именно такая ситуация и рассматривается в задаче) отверстие будет эквивалентно устройству, которое всю приходящую к нему энергию от всех внутренних точек сферы посылает узким пучком в диаметрально противоположную точку.

Легко понять, что в силу малости отверстия суммарная энергия, приходящая к нему от всех участков внутренней поверхности сферы, равна суммарной энергии, рассеиваемой во все стороны любым участком сферы, равным по площади отверстию (это следует из обратимости состояния равновесия — если все рассеиваемые лучи «заставить» двигаться в обратных направлениях, то ничего не изменится); это рассуждение не касается только точки, диаметрально противоположной отверстию.

Итак, в силу рассеяния доли энергии, посылаемые всеми внутренними точками как к отверстию, так и в противоположную отверстию точку, будут одинаковыми. Кроме того, ровно столько же энергии придет в точку, противоположную отверстию, и от отверстия. Следовательно, освещенность внутренних точек сферической поверхности будет ровно вдвое меньше освещенности точек участка сферы, противоположного отверстию. (Чем меньше площадь отверстия, тем точнее выполняется отношение 1:2.)

С. С. Кротов

„Квант" для младших школьников

Задачи

1. У каких полуокружностей, изображенный на рисунке, сумма длин больше — у верхних или у нижних?

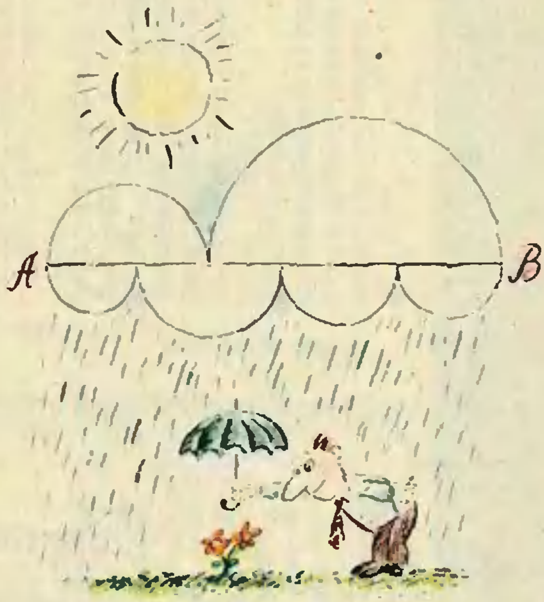
2. Почему растения не рекомендуют поливать днем, особенно в солнечную погоду?

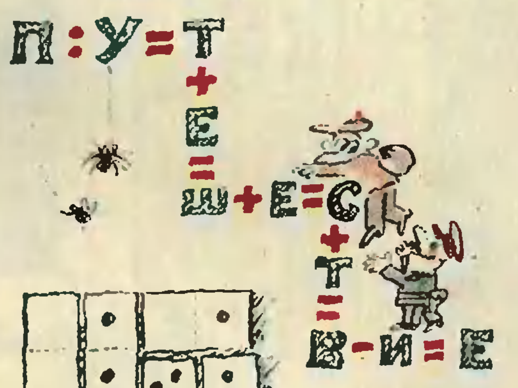
3. Совершите путешествие из пункта П в пункт Е (см. рисунок). Для этого замените буквы цифрами так, чтобы все равенства стали верными (одинаковые буквы заменяются одинаковыми цифрами, разные — разными). Счастливого пути!

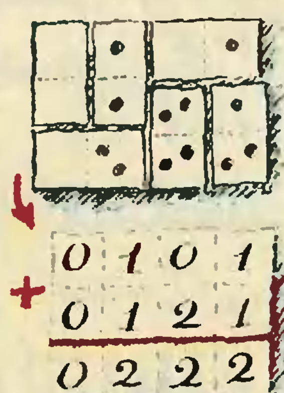
4. Из шести косточек домино выложен прямоугольник так, что ему соответствует пример на сложение (см. рисунок). Сложите из шести косточек домино (может быть, других) такой же прямоугольник так, чтобы сумма (т. е. число в нижней строчке) была наименьшей.

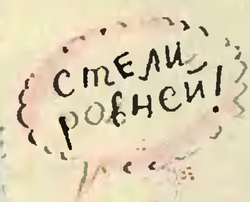
5. В детском кафе стоят одинаковые круглые и одинаковые квадратные столы, на которых лежат одинаковые круглые и одинаковые квадратные салфетки. Известно, что круглый стол можно покрыть четырьмя квадратными салфетками, а квадратный — четырьмя круглыми салфетками. Покажите, что диаметр круглой салфетки не меньше половины диагонали квадратного стола, а сторона квадратной салфетки не меньше радиуса круглого стола.

Эти задачи нам предложили ученик 8 класса Ю. Файзуллаев из колхоза «Правда» Шаватского района Хорезмской области, А. П. Савин, Л. П. Мочалов, Тран Куанг Дат (СРВ), В. В. Произволов.









Калейдоскоп „Кванта"

...вещи не могут ни создаваться из ничего, ни, однажды возникнув, вновь обращаться в ничто...

Лукреций Кар. «О природе вещей»

Вопросы и задачи

1. Может ли кинетическая энергия тела изменяться, если на тело не действуют силы?

●

2. Может ли кинетическая энергия тела оставаться неизменной, если равнодействующая приложенных к телу сил отлична от нуля?

●

3. Когда перенос электрического заряда из одной точки электрического поля в другую не сопровождается изменением энергии?

●

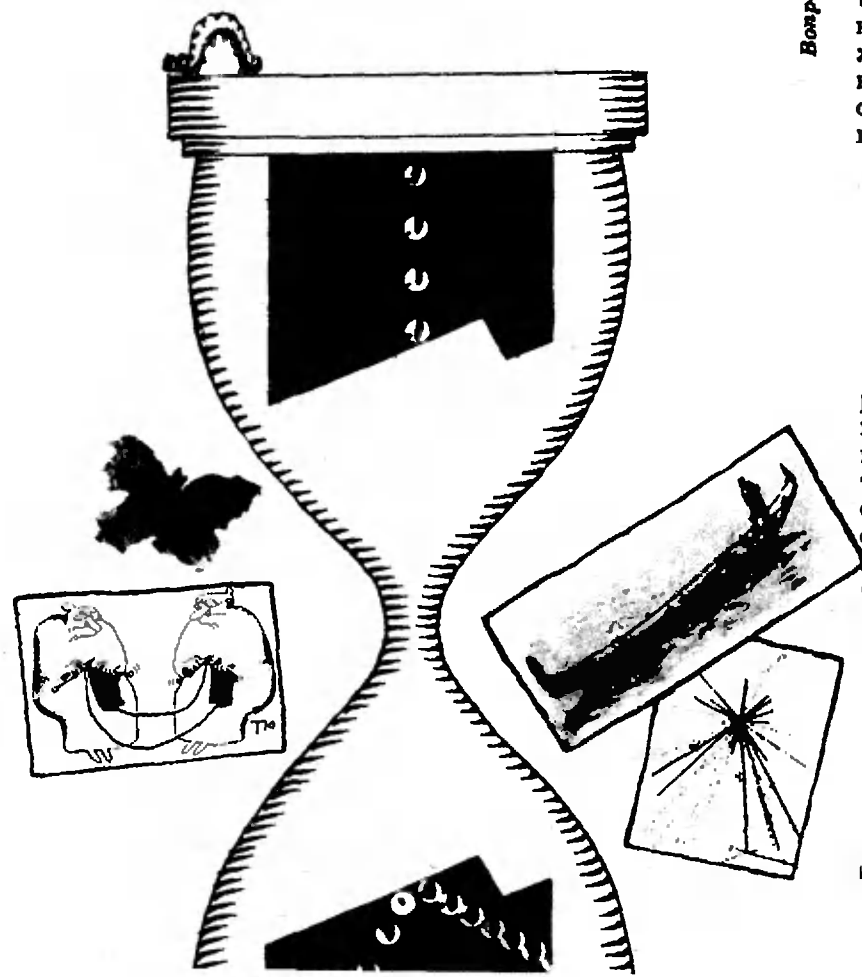
4. В какие виды энергии превращается при фотоэффекте энергия падающего на вещество света?

●

5. Каким образом космонавт, не связанный с кораблем, может вернуться на корабль?

Любопытно, что

● *...часто некоторые законы сохранения оказываются справедливыми лишь при описании ограниченного круга явлений. Так, при изучении химических реакций можно считать* [illegible]

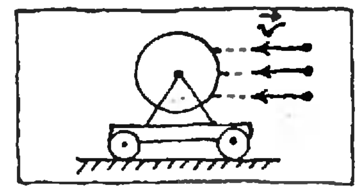


Вопросы и задачи

6. Зависит ли полный импульс хорошо центрированного маховика от частоты его вращения?

●

7. В массивный однородный цилиндр, который может без трения вращаться вокруг горизонтальной оси, попадает пуля, летящая горизонтально со ско-



ростью v, и после удара о цилиндр падает на тележку. Зависит ли скорость тележки, которую она приобретает после удара пули, от того, в какую часть цилиндра попадет пуля?

●

8. Излучая фотон, атом газа изменяет свой импульс. Почему это изменение неизбежно?

●

9. В процессе аннигиляции электрона и позитрона никогда не возникает один гамма-квант. Какой из за[illegible] сохранения проявляется в этом факте?

масса сохраняется, однако при ядерных реакциях применение такого закона было бы ошибочным, так как, например, масса конечных продуктов деления урана меньше массы исходного количества урана.

Любопытно, что...

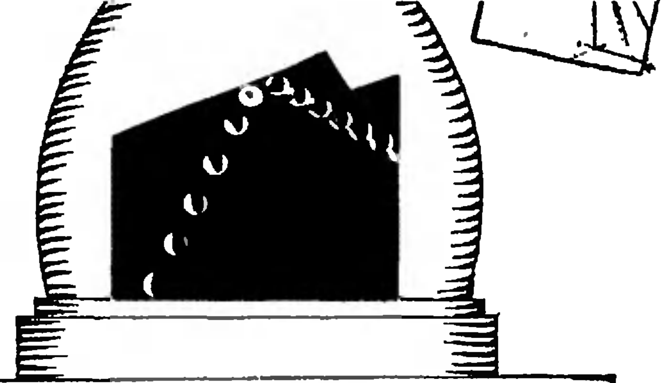
●

...если бы закон сохранения заряда не являлся вполне точным законом природы, то электрон мог бы распасться, например, на нейтрино и фотон. Поиски таких распадов, однако, не увенчались успехом и показали, что время жизни электрона по крайней мере не меньше 10^{22} лет. (Возраст же Вселенной оценивается сегодня учеными в 10^{10} лет.)

Любопытно, что ...

●

...именно закон сохранения заряда подсказал Дж. Максвеллу идею о возможном возникновении магнитного поля в результате изменения электрического поля. Развитие этой идеи привело Максвелла к предсказанию периодических электромагнитных процессов, распространяющихся в пространстве. Вычисленное значение скорости распространения оказалось в точности равным ранее измеренной скорости света.



А так ли хорошо знакомы вам

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ?

Развитие физики сопровождалось установлением самых разных законов сохранения, утверждающих, что в изолированных системах определенные величины не могут возникать или исчезать. Представления о том, что подобные законы существуют, возникли в глубине веков: приведенное в эпиграфе изречение Лукреция отражает еще античные взгляды. Сегодня физикам известно довольно много таких законов, часть из них знакома и вам — это законы сохранения импульса, энергии, заряда. Дальнейшее изучение физики позволит узнать, что есть весьма необычные законы сохранения, например, странности, четности и очарования. Но прежде — поработаем с теми, которые вы должны хорошо знать.

является в этом факте?

●

10. Металлическая пластина зарядилась под действием рентгеновских лучей. Каков знак заряда?

●

11. При аннигиляции электрона с позитроном образуются гамма-кванты; однако такого не происходит при встрече двух электронов или двух позитронов. Какой здесь сказывается закон сохранения?

Микроопыт

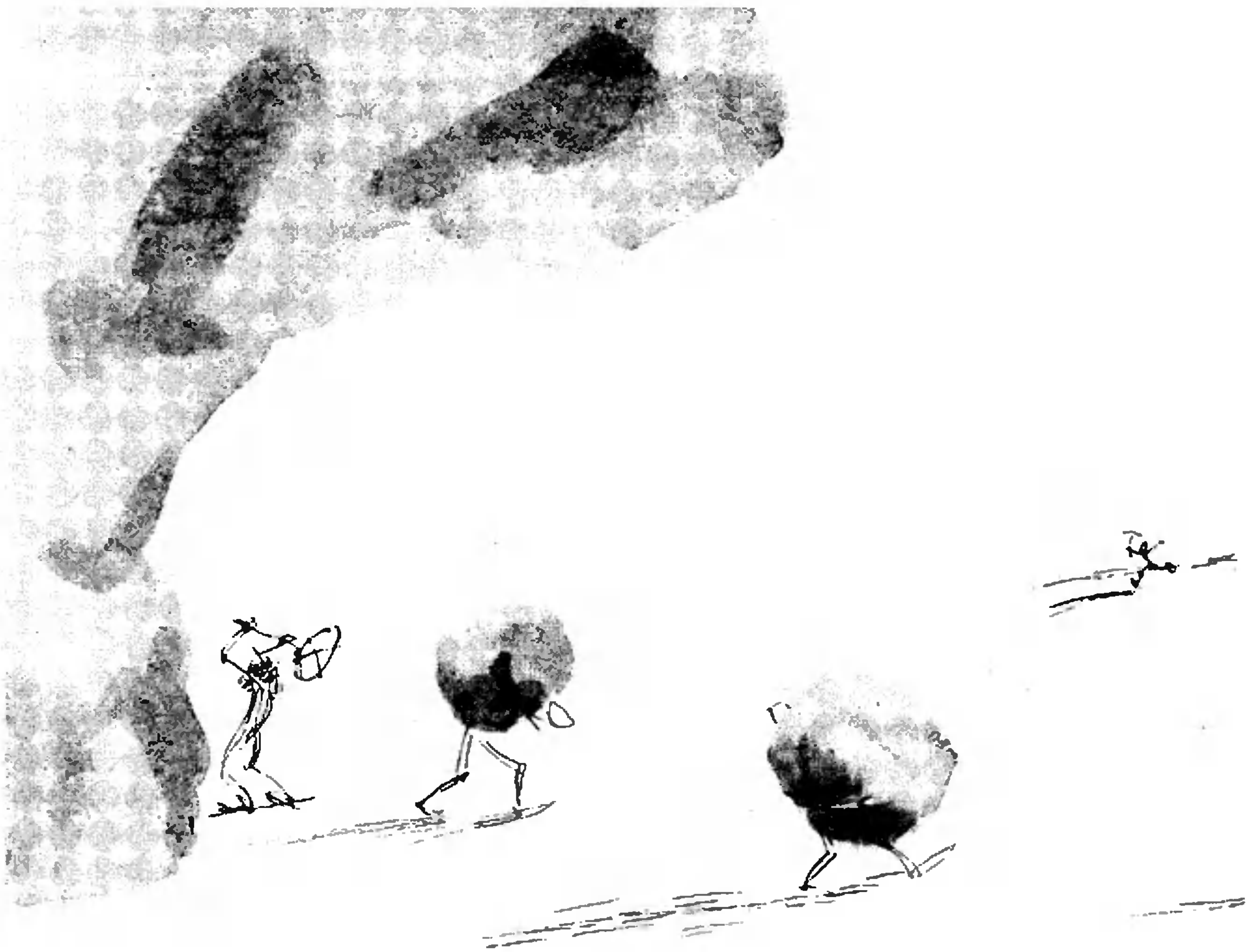
●

Пройдите от кормы неподвижной поначалу лодки к ее носовой части. Почему лодка станет двигаться в противоположную сторону?

Что читать в «Кванте»

О законах сохранения (публикации последних лет):

1. *«Столкновения тел» — 1984, № 4;*
2. *«Как вводятся физические величины» — 1984, № 10;*
3. *«Импульс и кинетическая энергия» — 1985, № 5 (с. 28);*
4. *«Механическая работа и механическая энергия» — 1985, № 5;*
5. *«Волк, барон и Ньютон» — 1986, № 9;*
6. *«Атомная физика в задачах» — 1986, № 12;*
7. *«Закон сохранения энергии» — 1987, № 5.*



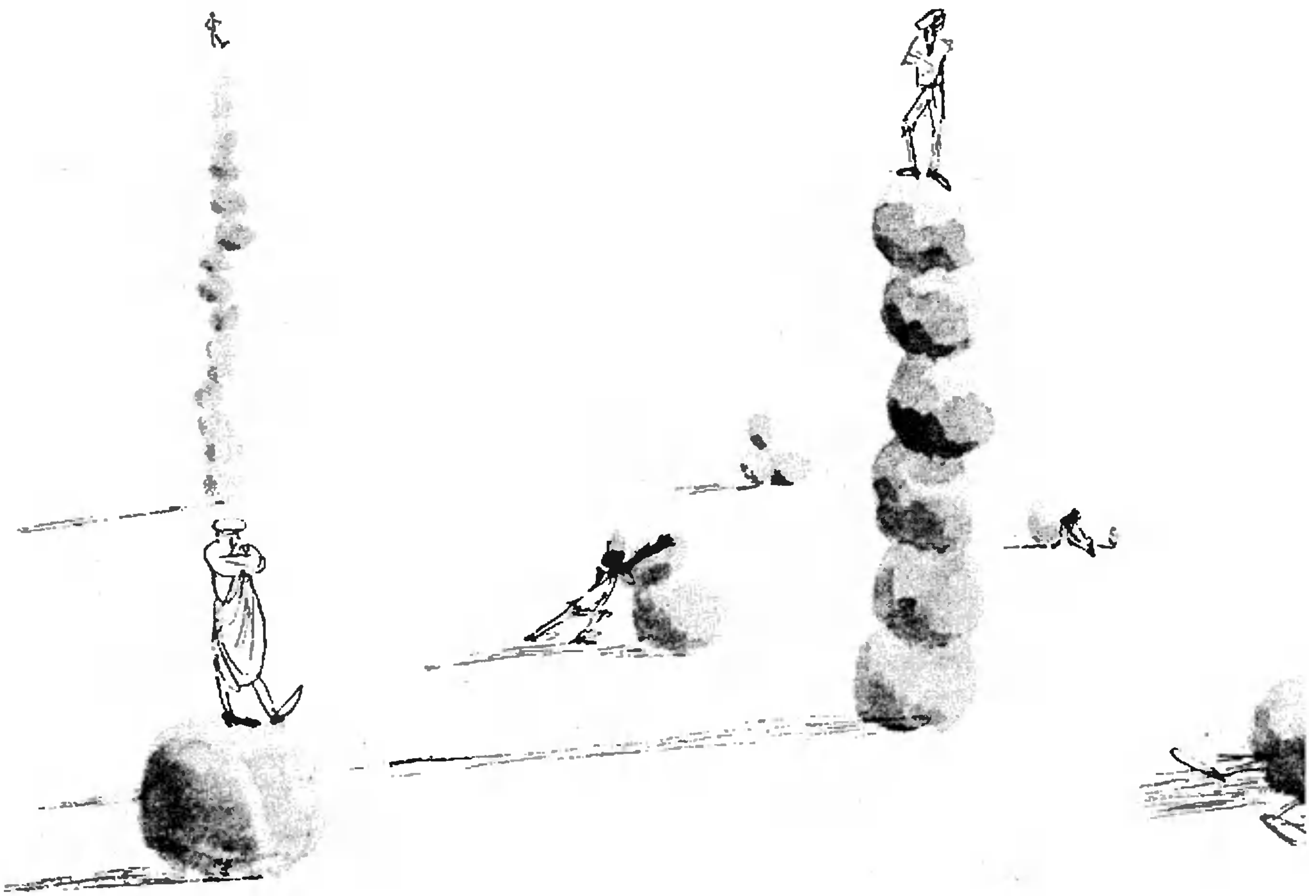
ИЗ ИСТОРИИ ДРОБЕЙ

Доктор физико-математических наук
Н. Я. ВИЛЕНКИН

Первой дробью, с которой познакомились люди, была *половина*. Хотя названия всех следующих дробей связаны с названиями их знаменателей (три — «треть», четыре — «четверть» и т. д.), для половины это не так — ее название во всех языках не имеет ничего общего со словом «два». Следующей дробью была *треть*. Эти и некоторые другие дроби встречаются в древнейших дошедших до нас математических текстах, составленных более 5000 лет тому назад,— древнеегипетских папирусах и вавилонских клинописных табличках. И у египтян, и у вавилонян были специальные обозначения для дробей 1/3 и 2/3, не совпадающие с обозначениями для других дробей.

Египтяне все дроби старались записать как суммы *долей*, т. е. дробей вида $1/n$. Единственным исключением была дробь 2/3. Например, вместо 8/15 они писали $1/3+1/5$. Иногда это бывало удобно. В папирусе, написанном египетским писцом Ахмесом, есть задача: ***разделить семь хлебов между восемью людьми***. Если резать каждый хлеб на 8 частей, придется сделать 49 разрезов. А по-египетски эта задача решалась так. Дробь 7/8 записывали в виде долей: $1/2+1/4+1/8$. Теперь ясно, что надо 4 хлеба разрезать пополам, 2 хлеба на 4 части и только один хлеб — на 8 частей (всего 17 разрезов).

Но складывать записанные в виде долей дроби было неудобно. Ведь в оба слагаемых могут входить одинаковые доли, и тогда при сложении появится дробь вида $2/n$. А таких дробей египтяне не до-



пускали. Поэтому папирус Ахмеса начинается с таблицы, в которой все дроби вида $2/n$, от $2/5$ до $2/99$, записаны в виде сумм долей. С помощью этой таблицы выполняли и деление целых чисел. Вот, например, как делили 5 на 21:

$$\frac{5}{21}=\frac{1}{21}+\frac{2}{21}+\frac{2}{21}=\frac{1}{21}+\left(\frac{1}{14}+\frac{1}{42}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{14}+\frac{1}{42}\right)=\frac{1}{21}+\frac{2}{14}+\frac{2}{42}=\frac{1}{7}+$$
$$+\frac{1}{21}+\frac{1}{21}=\frac{1}{7}+\frac{2}{21}=\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{42}.$$

Умели египтяне также умножать и делить дроби. Но при умножении приходилось умножать доли на доли, а потом, быть может, снова использовать таблицу. Еще сложнее обстояло дело с делением.

Совсем иным путем пошли вавилоняне. Дело в том, что система счисления в Вавилоне была *шестидесятиричной* — каждая единица следующего разряда была в 60 раз больше предыдущей. Например, запись $14''\ 42'\ 38$ означала число $14\cdot 60^2+42\cdot 60+38$, т. е. в нашей записи число 52958 (только вавилоняне пользовались не нашими цифрами, а другими обозначениями, составленными из клиньев). Поэтому и дроби были у вавилонян не десятичными, а шестидесятиричными. По сути дела мы и сейчас пользуемся такими дробями в обозначениях времени и величин углов. Например, время 3 ч 17 мин 28 с можно записать и так: $3{,}17'28''$ ч (читается 3 целых, 17 шестидесятых 28 три тысячи шестисотых часа). Вместо слов «шестидесятые доли», «три тысячи шестисотые доли» говорили короче: «первые малые доли», «вторые малые доли». От этого и произошли наши слова «минута» (по латыни «меньшая») и «секунда» (по латыни «вторая»). Так что вавилонский способ обозначения дробей сохранил свое значение до сих пор.

Не все дроби можно изобразить в виде конечных шестидесятиричных, как и не все дроби записываются в виде конечных десятичных. Например, дроби вида $1/7$, $1/11$, $1/13$ не могут быть записаны в шестидесятиричной форме. Но их можно с любой степенью точности заменить шестидесятиричными дробями. Так вавилоняне и поступали.

Шестидесятиричными дробями, унаследованными от Вавилона, пользовались греческие и арабские математики и астрономы. Но было неудобно работать над натуральными числами, записанными в десятичной системе, и дробями, записанными в шестидесятиричной. А работать с обыкновенными дробями было совсем уж плохо — попробуйте, например, сложить или умножить дроби $\frac{785}{2213}$ и $\frac{8917}{3411}$.

Поэтому голландский математик и инженер Симон Стевин предложил в 1585 году перейти к десятичным дробям. Сначала их писали весьма сложно, но постепенно перешли к современной записи. Еще за полтора столетия до Стевина десятичные дроби ввел работавший в Самаркандской обсерватории Улугбека астроном ал-Каши, но его работа осталась неизвестной европейским математикам.

Сейчас в ЭВМ используют двоичные дроби. В двоичной системе счисления единица каждого следующего разряда вдвое больше единицы предыдущего разряда. Это позволяет при записи чисел пользоваться лишь двумя цифрами: 0 и 1. Например, запись 100101 означает число $1\cdot 2^5+0\cdot 2^4+0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2+1$, т. е. число 37. Хотя и получается более длинная запись, но нужно всего две цифры. Такую запись гораздо легче реализовать в ЭВМ с помощью электрического тока (например, 1 — ток проходит, а 0 — ток не проходит). Двоичные дроби тоже имеют, например, вид 0,101101 (попробуйте прочесть, что это означает!). Любопытно, что двоичными дробями пользовались, по сути дела, в Древней Руси, где были такие дроби, как *половина, четь, пол-чети, пол-пол-чети* и т. д.

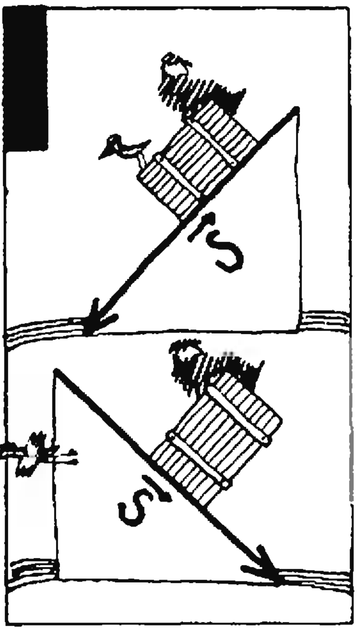
Интересная система дробей была в Древнем Риме. Она основывалась на делении единицы измерения веса *асса* на 12 долей. Двенадцатую долю асса называли *унцией*. А путь, время и т. д. сравнивали с наглядной вещью — весом. Например, римлянин мог сказать, что он прошел семь унций пути или прочел 5 унций книги. При этом, конечно, речь не шла о взвешивании пути или книги. Просто говорилось, что пройдено 7/12 пути или прочтено 5/12 книги. А для дробей, получающихся сокращением дробей со знаменателем 12 или раздроблением двенадцатых долей на более мелкие, были особые названия.

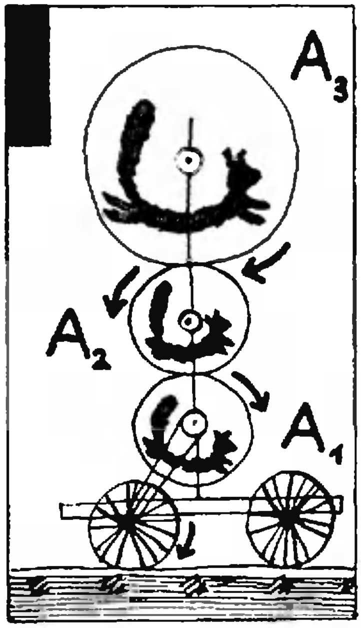
Даже сейчас иногда говорят «он скрупулезно изучил этот вопрос». Это значит, что вопрос изучен до конца, что ни одной самой малой неясности не осталось. А происходит странное слово «скрупулезно» от римского названия 1/288 асса — *скрипулус*. В ходу были и такие названия: *семис* — половина асса, *секстанс* — шестая его доля, *семиунция* — полунции, т. е. 1/24 асса и т. д. Всего применялось 18 различных названий. Чтобы работать с дробями, надо было для этих дробей помнить и таблицу сложения, и таблицу умножения. Поэтому римские купцы твердо знали, что при сложении *триенса* (1/3 асса) и *секстанса* получается *семис*, а при умножении *беса* (двух третей асса) на *сескунцию* (3/2 унции, т. е. 1/8 асса) получается *унция*. При этом они хорошо понимали, что умножают не сами веса (умножать вес на вес смысла не имеет), а выражающие эти веса дроби. Для облегчения работы составлялись специальные таблицы, некоторые из которых дошли до нас.

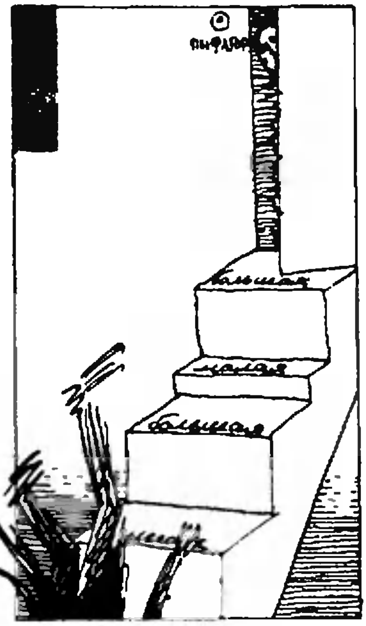
Так что ту роль, которую в Древнем Вавилоне играло число 60, а в Древней Руси — число 2, в Древнем Риме играло число 12 — римская система дробей и мер была *двенадцатиричной* (хотя числа они записывали по десятичной системе, только другим образом, чем это делаем мы). Из-за того, что числа вида $1/10^n$ не выражаются в форме конечных двенадцатиричных дробей, римляне не умели представлять результат деления на 10, 100 и т. д. дробью. Например, один римский математик, деля 1001 асса на 100, сначала получил 10 ассов, потом раздробил асс на унции и т. д., но от остатка, естественно, не избавился.

В греческих сочинениях по математике дробей не встречалось. Греческие ученые считали, что математика должна заниматься только целыми

(Окончание см. на с. 54)







Школа в „Кванте"

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Законы сохранения и системы отсчета» предназначена восьмиклассникам, «Как работает электродвигатель?» — девятиклассникам, «Физика музыкальной гармонии» — десятиклассникам.

Законы сохранения и системы отсчета

Есть надежный способ проверить, хорошо ли вы понимаете законы, относящиеся к движению тел,— рассмотрите явление в различных инерциальных системах отсчета. Нередко сразу же обнаруживаются парадоксы, свидетельствующие о том, что настоящего понимания у вас еще нет. Часто это связано с тем, что учителя и авторы учебников и задачников заботливо выбирают систему отсчета, где процесс выглядит наиболее просто. Такая методика в значительной мере оправданна: зачем вдаваться в сложные объяснения, если можно сделать проще. Однако все это хорошо до поры до времени. В нестандартной ситуации без обстоятельного анализа и настоящего понимания не обойтись.

Все сказанное непосредственно относится, прежде всего, к закону сохранения энергии.

Потенциальная энергия и работа. Вот простейшая задача. К стене прикреплена растянутая пружина с шаром на свободном конце. Сжимаясь, пружина совершает работу, равную изменению потенциальной энергии, взятому со знаком минус:

$$A = -\Delta E_p = \frac{kx^2}{2} \qquad (*)$$

(k — жесткость пружины, x — ее начальное растяжение).

Работа — произведение модулей векторов силы и перемещения на косинус угла между этими векторами — зависит от системы отсчета, так как при неизменной силе перемещение тела в различных системах отсчета различно. В то же время потенциальная энергия (а значит, и ее изменение) — функция расстояния между телами или их частями — от системы отсчета зависеть не может.

Что будет с равенством (*), если перейти в движущуюся систему отсчета? Работа изменится, а потенциальная энергия нет?

Недоразумение разрешается очень просто. В действительности изменение потенциальной энергии *двух* взаимодействующих тел во всех случаях равно, со знаком минус, работе *двух* консервативных сил, приложенных к телам. В этом все дело. Потенциальная энергия, как и сила, характеризует взаимодействие *двух* тел. К одному телу понятие потенциальной энергии не применимо. Обычно «для простоты» рассматриваются такие системы отсчета, в которых одно из тел (стена в нашем примере) неподвижно и поэтому одна из работ равна нулю. Работа же двух сил взаимодействия одинакова во всех системах отсчета благодаря третьему закону Ньютона. Покажем это.

Пусть два тела взаимодействуют друг с другом и в неподвижной системе отсчета совершают перемещения $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$, совпадающие по направлению с соответствующими силами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, причем $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, $F_1 = F_2$ (рис. 1, *а*). Тогда полная работа

$$A = A_1 + A_2 = F_1 s_1 + F_2 s_2.$$

При переходе в систему отсчета, движущуюся относительной первой, оба тела получают дополнительные перемещения $\vec{s}_0$ (рис. 1, *б*). Работа в этой системе

$$A' = A_1' + A_2' = F_1(s_1 + s_0) + F_2(s_2 - s_0) = (F_1 s_1 + F_2 s_2) + (F_1 s_0 - F_2 s_0) = A.$$

Заметим, что полученный результат справедлив не только для консервативных сил — тяготения и упругости, но и для сил трения.

Работа сил трения. Говорят, и правильно говорят, что работа внутренних сил трения в системе всегда отрицательна. Как это доказать?

Нельзя ведь утверждать, что сила трения во всех случаях совершает отрицательную работу. Положите ручку на лист бумаги и потяните за лист. Сила, приложенная со стороны ручки к листу, совершает отрицательную работу, но сила, приложенная к ручке,— положительную. Кроме того, выбором системы отсчета работу любой силы из отрицательной можно превратить в положительную за счет изменения направления перемещения.

Однако в системе отсчета, где одно из взаимодействующих тел неподвижно, работа всегда отрицательна, так как сила трения направлена против скорости относительного движения тел. Только что было показано, что работа двух сил взаимодействия от системы отсчета не зависит. Поэтому и в любой системе отсчета суммарная работа сил трения отрицательна.

Кинетическая энергия и работа. С кинетической энергией в различных системах отсчета дело обстоит совсем иначе, чем с потенциальной. Кинетическая энергия относится к одному телу, а не к двум. Изменение кинетической энергии тела равно работе одной равнодействующей силы, т. е. сумме всех сил, приложенных к данному телу. Эти силы могут быть как внутренними силами системы, так и внешними.

Согласно теореме о кинетической энергии,

$$\Delta E_k = A.$$

При переходе в другую систему отсчета, движущуюся со скоростью $\vec{v}_0$ относительно первой (рис. 2), кинетическая энергия изменяется:

$$E_k = \frac{mv_1^2}{2},$$

$$E_k' = \frac{mv_2^2}{2} = \frac{m(v_1 - v_0)^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} - m(v_1 v_0) + \frac{mv_0^2}{2},$$

где v_1 — скорость тела в первой системе отсчета, а $v_2 = v_1 - v_0$ — во второй. При действии на тело внешней силы, по теореме о кинетической энергии, в движущейся системе от-

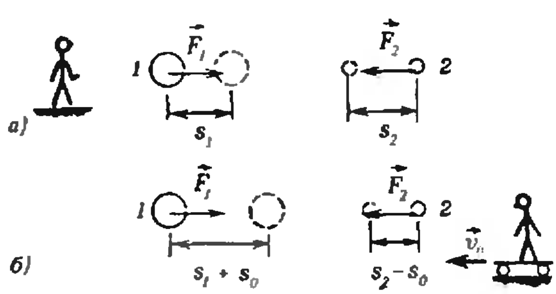


Рис. 1.

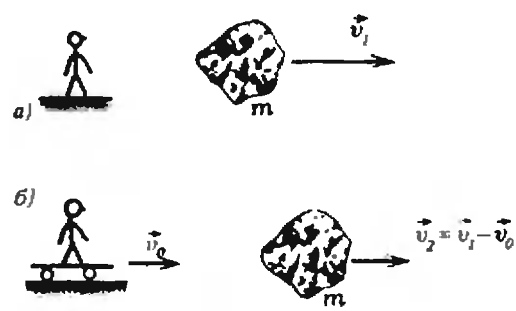


Рис. 2.

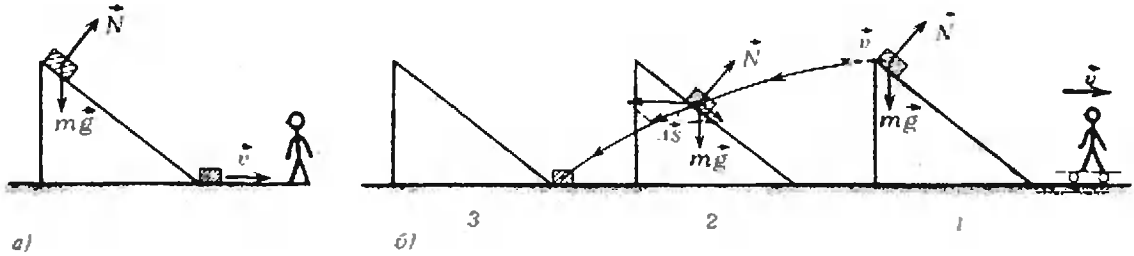


Рис. 3.

счета

$$\Delta E'_k = A'.$$

Таким образом, при переходе от одной системы отсчета к другой меняется не только кинетическая энергия, но и изменение кинетической энергии. Но всегда изменение кинетической энергии равно работе сил в этой же системе отсчета.

Определить, как меняется кинетическая энергия в зависимости от системы отсчета, не сложно, Вычислить же изменение работы гораздо сложнее. Рассмотрим такую задачу.

Кубик соскальзывает без трения с наклонной плоскости высотой h (рис. 3, *а*). У основания плоскости кинетическая энергия $E_{k2}=mv^2/2$, а начальная энергия $E_{k1} = 0$. Изменение кинетической энергии равно работе силы тяжести:

$$\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = \frac{mv^2}{2} = mgh.$$

Рассмотрим движение кубика с точки зрения инерциальной системы отсчета, движущейся относительно наклонной плоскости со скоростью $v = \sqrt{2gh}$ (рис. 3, *б*). В этой системе начальная скорость кубика равна $v = \sqrt{2gh}$, а конечная скорость равна нулю, поэтому

$$\Delta E'_k = E'_{k2} - E'_{k1} = -\frac{mv^2}{2} \neq mgh.$$

Согласно теореме о кинетической энергии,

$$\Delta E'_k = -mgh = A'$$

— работа оказывается отрицательной. Дело в том, что в движущейся системе отсчета сила реакции плоскости не перпендикулярна перемещению кубика. Она-то и совершает отрицательную работу (наряду с положительной работой силы тяжести), уменьшающую кинетическую энергию кубика. Однако вычислить ее непосредственно, не прибегая к закону сохранения энергии, весьма затруднительно.

Закон сохранения импульса. Импульс силы не зависит от системы отсчета. Поэтому и изменение импульса тела одинаково во всех инерциальных системах отсчета:

$$\Delta\vec{P} = \vec{F}\Delta t.$$

В данном случае все очень просто — импульс тела при переходе от одной системы отсчета к другой меняется, но изменение импульса остается одним и тем же.

Г. Я. Мякишев

Как работает электродвигатель?

Вопрос не такой простой, как кажется на первый взгляд. Естественный ответ со ссылкой на закон Ампера для силы, действующей на проводник с током со стороны магнитного поля, суть дела объясняет далеко не полностью.

Откуда берется сила Ампера? Она возникает из-за того, что на движущиеся в проводниках (металлических) электроны действует магнитная сила Лоренца. Ее модуль

$$F = evB\sin\alpha,$$

где e — заряд частицы, имеющей скорость $\vec{v}$, $\vec{B}$ — магнитная индукция, α — угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$. Сила $\vec{F}$ перпендикулярна $\vec{v}$ и $\vec{B}$, и ее направление определяется правилом левой руки. Казалось бы, если эта сила в любой момент времени перпендикулярна скорости, то работу совершать она не может. Тем не менее именно магнитная сила вращает якорь электродвигателя.

Столь же «загадочна» работа генератора, превращающего механическую энергию в энергию электрического тока. Если ЭДС индуцируется во вращающемся якоре генератора, то сторонней силой может быть только сила Лоренца. А она работы не совершает. Откуда же в генераторе появляется ЭДС?

Чтобы понять, в чем здесь дело, рассмотрим один из проводников обмотки якоря электродвигателя (рис. 1). Вектор магнитной индукции $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости чертежа и направлен от нас. По проводнику сверху вниз течет ток I, электроны при этом движутся снизу вверх со скоростью $\vec{v}_1$ относительно проводника. Сам проводник движется слева направо со скоростью $\vec{v}_2$. Результирующая скорость электрона $\vec{v}$ направлена под углом к проводнику. Сила Лоренца $\vec{F}$ перпендикулярна скорости $\vec{v}$, и ее работа действительно равна нулю.

Однако силу $\vec{F}$, как и любую другую, можно разложить на две составляющие $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, направленные перпендикулярно проводнику и вдоль него: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Составляющая $\vec{F}_1$ совпадает по направлению со скоростью $\vec{v}_2$ и совершает положительную работу A_1 по перемещению проводника. Другая составляющая $\vec{F}_2$ тормозит электроны и совершает отрицательную работу A_2.

Вычислим работу каждой силы в единицу времени.

Сила $\vec{F}_1$ возникает из-за движения электронов со скоростью $\vec{v}_1$ вдоль проводника. Угол α_1 между векторами $\vec{B}$ и $\vec{v}_1$ равен $\pi/2$. Модуль силы $F_1 = ev_1B$. Если бы проводник не двигался ($v_2 = 0$), то сила $\vec{F}_1$ равнялась бы $\vec{F}$ и не совершала бы работы. Но проводник движется со скоростью $\vec{v}_2$. Поэтому за единицу времени сила $\vec{F}_1$ совершает положительную работу

$$A_1/t = F_1v_2 = eBv_1v_2.$$

В свою очередь, сила $\vec{F}_2$ появляется за счет движения электронов вместе с проводником со скоростью $\vec{v}_2$, перпендикулярной к проводнику. Угол α_2 между векторами $\vec{B}$ и $\vec{v}_2$ также равен $\pi/2$. Модуль силы $F_2 = ev_2B$. Если бы в проводнике не было тока ($v_1 = 0$), то сила $\vec{F}_2$ равнялась бы силе $\vec{F}$ и не совершала бы работы. Но электроны движутся со скоростью $\vec{v}_1$ против направления силы $\vec{F}_2$. Поэтому эта сила тормозит электроны и за единицу времени совершает отрицательную работу

$$A_2/t = -F_2v_1 = -eBv_1v_2.$$

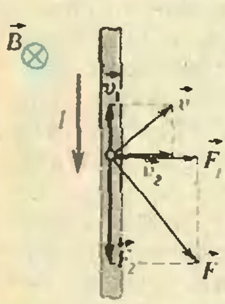


Рис. 1.

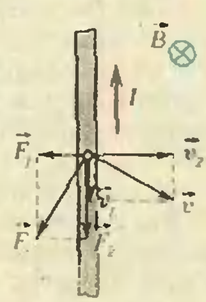


Рис. 2.

Весь фокус в том, что положительная работа составляющей силы Лоренца $\vec{F}_1$ равна по модулю отрицательной работе составляющей $\vec{F}_2$. Полная работа силы Лоренца, как это и должно быть, равна нулю.

Удельная работа $A_2/e = \mathcal{E}_i$ представляет собой ЭДС, индуцируемую в якоре электродвигателя. Работа силы $\vec{F}_2$ привела бы к остановке электронов и прекращению тока даже при нулевом сопротивлении обмоток якоря, если бы еще одну работу — A_3 — не совершал источник тока. Эту работу совершает электрическое поле, возникающее в проводнике при включении двигателя в цепь. Напряжение источника поддерживает движение электронов в обмотке, несмотря на торможение их магнитной силой $\vec{F}_2$ и наличие у проводников сопротивления R. Таким образом, в конечном счете электродвигатель работает за счет источника тока, питающего якорь.

Сила тока в цепи якоря определяется по формуле

$$I = \frac{U - \mathcal{E}_i}{R},$$

где U — приложенное к мотору напряжение. При включении двигателя в первый момент $\mathcal{E}_i \approx 0$, и сила тока оказывается весьма большой из-за малого сопротивления обмоток якоря. Она в 10—15 раз превышает силу тока работающего двигателя. Поэтому при пуске мощных двигателей применяются специальные реостаты для плавного повышения напряжения.

Работа генератора электрического тока объясняется так же, как и работа мотора. Когда якорь генератора приводится в движение, электроны проводников якоря приобретают скорость направленного движения $\vec{v}_2$ (рис. 2). Из-за этого появляется сила Лоренца $\vec{F}_2$, сообщающая электронам скорость $\vec{v}_1$ вдоль проводников. Результирующая сила $\vec{F}$ перпендикулярна суммарной скорости $\vec{v}$ и не совершает работы. Составляющая $\vec{F}_2$ представляет собой стороннюю силу, вызывающую появление тока в обмотке якоря. Она совершает положительную работу A_2. ЭДС генератора $\mathcal{E}_i = A_2/e$. Другая составляющая $\vec{F}_1$ направлена против движения проводника. Она совершает отрицательную работу A_1 и тормозит вращение якоря. Обе работы равны по модулю и противоположны по знаку. Якорь не останавливается, несмотря на тормозящую силу $\vec{F}_2$, благодаря действию внешних сил со стороны двигателя, вращающего якорь. Именно положительная работа внешних сил компенсирует отрицательную работу силы $\vec{F}_1$, и вращение якоря продолжается непрерывно.

Чем больше потребителей включено в цепь генератора, тем больше должна быть сила тока в якоре для поддержания на выходе генератора неизменного напряжения. Соответственно, больше будет сила $\vec{F}_1$, тормозящая якорь, и для поддержания номинального режима работы генератора потребуется бóльшая мощность двигателя. Таким образом, включая без нужды обыкновенную электрическую лампочку, мы заставляем двигатель, вращающий якорь генератора, развивать чуть бóльшую мощность.

Г. Я. Мякишев

Физика музыкальной гармонии

Вы знаете, что звуки, окружающие нас, есть не что иное, как колебания давления и плотности воздуха. Среди всего многообразия звуков некоторые оказывают на человека сильное эмоциональное воздействие. Это — звуки музыкальные. Объяснить их особое взаимодействие с мозгом только физическими причинами, разумеется, нельзя. Но можно, говоря словами Пушкина, «поверить алгеброй гармонию».

Согласно дошедшим из древности преданиям, первыми, кто попытался сделать это, были Пифагор и его ученики. Ими было установлено, что одинаково натянутые струны, сделанные из одного материала, издают соглас-

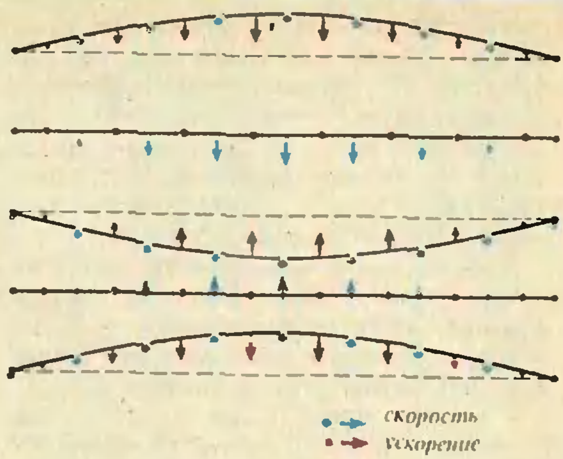


Рис. 1. Колебания струны, закрепленной с двух сторон и оттянутой посередине. Каждая следующая картинка отличается по времени от предыдущей на четверть периода колебаний.

ное музыкальное звучание, если их длины относятся, как небольшие целые числа. Например, если взять две струны, одна из которых вдвое короче другой, то извлекаемые из них звуки оказываются согласными. Музыканты в таком случае говорят, что звуки отличаются на октаву, и обозначают их одной нотой: например, «до» первой октавы, «до» второй октавы и т. п.

Посмотрим, с физической точки зрения, как происходят колебания струны с закрепленными концами (рис. 1). Если струну оттянуть посередине и отпустить, она будет совершать колебания, при которых скорости и ускорения всех точек направлены одинаково. *) Такие колебания определяют основной тон звучания струны. Оказывается, частота ν основного тона струн, сделанных из одного и того же материала и натянутых с одинаковой силой, зависит только от их длины l, причем зависит обратно пропорционально: $\nu \sim 1/l$. Возможны также и другие колебания струны — с частотой вдвое, втрое и т. д. большей, чем частота основного тона. Их называют обертонами.

Но вернемся к музыкальным звукам. Теперь мы можем сказать, что частоты, соответствующие одной и той же ноте в первой, второй и т. д. октавах, относятся, как 1:2:4:8 ... А как следует выбирать музыкальные тоны

*) О том, как возникают такие колебания, можно прочитать, например, в заметке И. К. Белкина «О музыкальных звуках и их источниках» («Квант», 1985, № 9, с. 26). (*Примеч. ред.*)

внутри одной октавы, чтобы они тоже звучали согласно? Ответ на этот вопрос дали пифагорейцы, построив музыкальную гамму — согласную последовательность тонов внутри октавы, т. е. указав закон, по которому следует выбирать длины струн для извлечения этих тонов (рис. 2).

Попробуем воспроизвести рассуждения пифагорейцев. Возьмем струну длиной l с частотой основного тона ν_1. Соответствующий этой ноте тон в следующей октаве имеет частоту $2\nu_1$ — его можно извлечь из вдвое более короткой струны. Частотный интервал от ν_1 до $2\nu_1$, соответствующий одной октаве, мы и будем делить. Как уже упоминалось, весьма согласно звучат струны, длины которых кратны. Поэтому можно ожидать, что звук с частотой $^3/_2\nu_1$, извлекаемый из струны длиной $^2/_3 l_1$, также окажется согласным основному тону ν_1. Так в пифагоровой гамме появляется звук, называемый квинтой, частота которого в 1,5 раза больше частоты основного тона.

Затем естественно попробовать звучание струны, которая в 1,5 раза длиннее основной. Частота соответствующего ей основного тона составляет $^2/_3\nu_1$ и выходит за пределы рассматриваемой октавы. Однако мы уже знаем, что удвоением, т. е. увеличением на октаву, этот звук можно перевести в рассматриваемый промежуток и получить частоту $^4/_3\nu_1$. Такой звук называют квартой. Между собой частоты квинты и кварты относятся как $\frac{^3/_2\nu_1}{^4/_3\nu_1}=9/8=1,125$. Это отношение и было выбрано пифагорейцами в качестве основного шага — ступени гаммы.

Теперь мы можем воспроизвести весь пифагоров строй (названия тонов в нем происходят от латинских числительных). Основной тон — прима — имеет частоту ν_1. Следующий — секунда — частоту $\nu_2 = 1,125\nu_1$. Еще на один шаг отличается терция: $\nu_3 = 1,125\nu_2=(1,125)^2\nu_1 = 1,2656\nu_1$. Если бы мы повторили эту процедуру еще раз, то получили бы звук, плохо сочетающийся с основным, и при этом пропустили бы уже известную нам кварту, частота которой $\nu_4={}^4/_3\nu_1 = 1,3333\nu_1$ $(\nu_4<(1,125)^3\nu_1=1,424\nu_1)$. Поэтому в качестве четвертой ступени звукоряда берется кварта, а пятой — также уже известная нам квинта: $\nu_5=1,125\ \nu_4=1,50\ \nu_1$. Частоты двух последующих ступеней находятся по обычному правилу: $\nu_6=1,125\ \nu_5=1,6875\ \nu_1$ — секста, $\nu_7=1,125\ \nu_6=1,8984\nu_1$ — септима, и последней оказывается октава $\nu_8 = 2\nu_1$ — верхняя граница выбранного нами диапазона частот.

Как нетрудно видеть, из-за начального выбора квинты и кварты в пифагоровом строе возникло два различ-

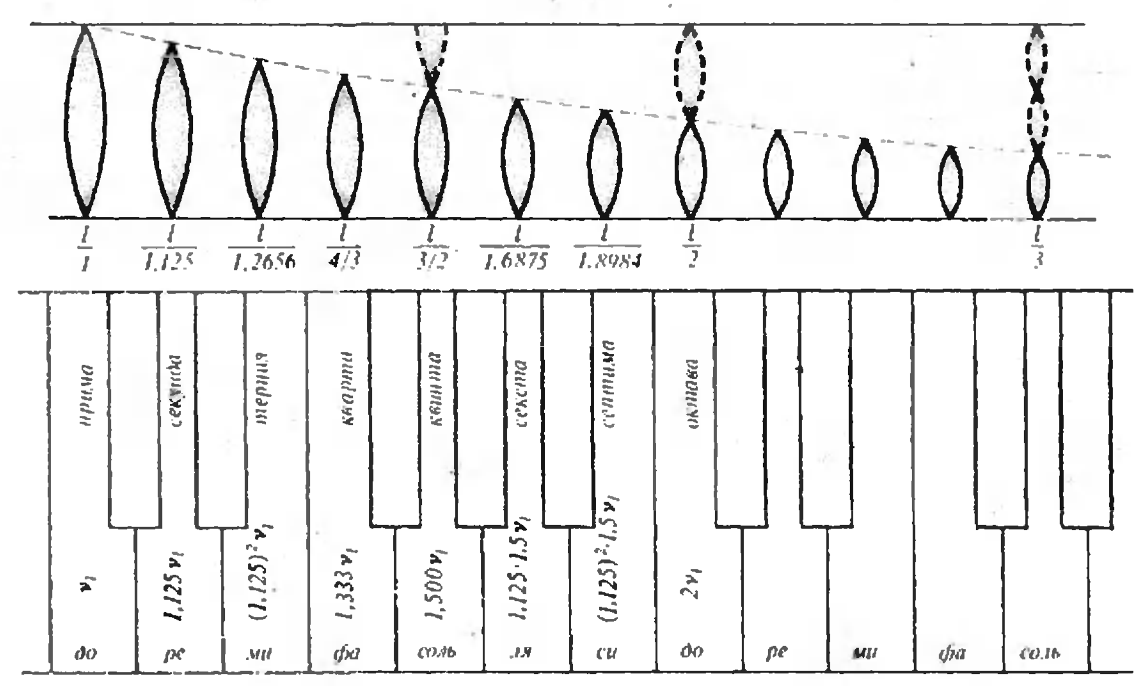


Рис. 2. Пифагорова гамма.

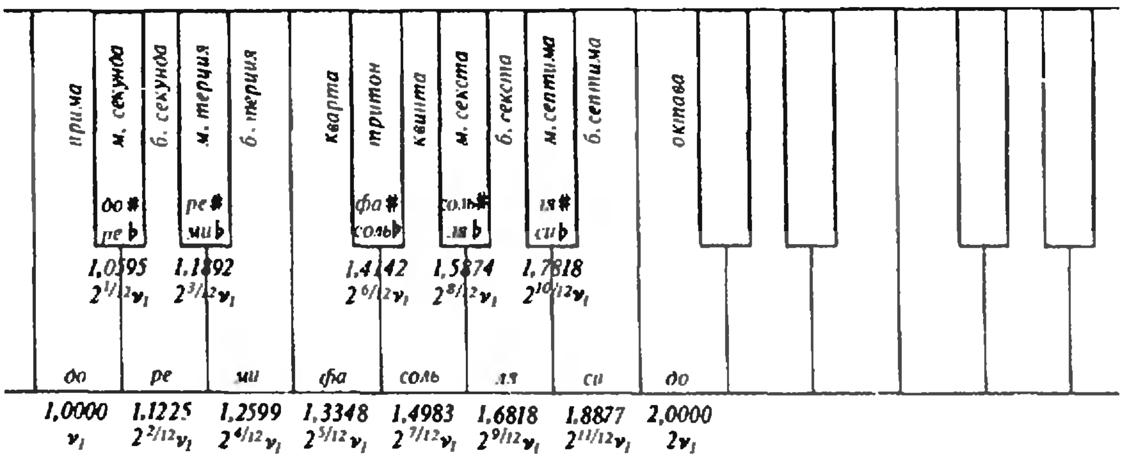


Рис. 3. Хроматическая гамма.

ных интервала: основной интервал, или большая секунда,— $1{,}125 = \nu_2/\nu_1 = \nu_3/\nu_2 = \nu_5/\nu_4 = \nu_6/\nu_5 = \nu_7/\nu_6$ и малый интервал, или малая секунда,— $1{,}0535 = \nu_4/\nu_3 = \nu_8/\nu_7$. Пифагоровы тоны соответствуют белым клавишам клавиатуры, а черные клавиши размещены как раз между теми белыми, где оказывается большой интервал.

К сожалению, оказывается, что ширина двух малых интервалов — $1{,}0535 \times 1{,}0535 = 1{,}110$ (поскольку интервалы есть отношения частот, то для вычисления большего интервала входящие в него малые надо перемножать, а не складывать) заметно для слуха отличается от большого — 1,125. Поэтому звуки пифагоровой гаммы неравноправны — гамму не удается начать с любой из нот. Чтобы изменить тональность, музыкальный инструмент нужно настроить заново. Для струнных инструментов это сделать нетрудно, но орган, например, который состоит из множества труб — каждая для своего звука, настраивают при его создании.

Несмотря на это неудобство, пифагорова гамма (наряду с другими типами музыкальных рядов) прослужила музыкантам более двух тысяч лет — до XVI века. Затем получила распространение так называемая диатоническая гамма, которая была построена на частотах, составленных из отношений чисел 2, 3 и 5. Но и она страдала аналогичным недостатком.

Толчком к дальнейшему усовершенствованию музыкального строя, возможно, опять стали физические исследования. Француз М. Мерсенн (1588—1648) установил, как зависит частота колебаний струны не только от ее длины, но и от силы натяжения, сечения струны и плотности материала, из которого она сделана. Вскоре после этого было изобретено фортепиано — инструмент, в котором струны настроены на последовательные музыкальные тоны с частотами от 27,5 до 3520 Гц, охватывающие 7 октав.

Примерно в то же время был создан так называемый хорошо темперированный строй, то есть хроматическая гамма, в которой все последовательные интервалы выбраны равными между собой (рис. 3). Ключом к ее созданию стало математическое совпадение. Оказалось, что степени числа $\sqrt[12]{2}$ с хорошей точностью совпадают с пифагоровыми отношениями (сравните их сами) — хроматическая квинта, например, отличается от пифагоровой всего на 0,11 % — такая погрешность неразличима на слух. Поэтому на современных музыкальных инструментах можно играть в любой из 24 тональностей (12 мажорных и 12 минорных). То, что при этом можно добиться согласного звучания независимо от тональности, доказывал Бах, когда писал свой «Хорошо темперированный клавир» — 24 прелюдии и фуги во всех тональностях. Существуют ли физические причины различия между мажором и минором, увы, нам неизвестно до сих пор.

А. В. Бялко

Мечта становится реальностью

(Открытие высокотемпературной сверхпроводимости)

«Если нельзя, но очень хочется, то можно.» Этими словами можно охарактеризовать открытие, которое буквально сегодня произошло в физике твердого тела и о котором пойдет речь в данной заметке.

Впервые о сверхпроводимости, одном из самых ярких и необычных явлений физики, стало известно 28 апреля 1911 года. Нидерландский физик Г. Камерлинг-Оннес на заседании Королевской академии наук в Амстердаме сообщил об обнаруженном им эффекте — полном исчезновении электрического сопротивления ртути, охлажденной жидким гелием до температуры $T=4{,}15$ К. Вскоре сверхпроводимость при низких температурах была обнаружена и в ряде других металлов и сплавов.

Практические перспективы открытого явления казались безграничными: линии передач электроэнергии без потерь, сверхмощные магниты, электромоторы и трансформаторы нового типа, аккумуляторы с неограниченной ёмкостью и т. п. Однако два непреодолимых в то время препятствия стали на пути реализации этих планов. Первое — это чрезвычайно низкие температуры, при которых сверхпроводимость проявлялась во всех известных материалах. Для охлаждения до таких температур приходится пользоваться остродефицитным и дорогим жидким гелием, что делает многие заманчивые проекты использования сверхпроводимости попросту нерентабельными. Второе препятствие — его вскоре с разочарованием обнаружил сам Камерлинг-Оннес — связано с тем, что сверхпроводимость оказалась весьма «капризной» по отношению к магнитному полю: в сильных полях она исчезает (в ртути, например, это происходит при индукции магнитного поля выше 0,04 Тл).

На протяжении длительного времени природа сверхпроводимости оставалась необъясненной, лишь в 1957 году это явление нашло последовательное теоретическое объяснение. Как оказалось, сверхпроводимость связана с возникновением в некоторых металлах при низких температурах специфического притяжения между электронами, обусловленного их взаимодействием посредством окружающей кристаллической решетки.

Создание теории сверхпроводимости дало мощный импульс дальнейшим ее исследованиям. Наряду с обнаружением принципиально новых, квантовых, эффектов, свойственных сверхпроводникам, значительный прогресс был достигнут и в получении новых сверхпроводящих материалов. Так, к середине 80-х годов были созданы сверхпроводники, способные выдерживать огромные магнитные поля (вплоть до 60 Тл) и пропускать соответственно большие токи. Однако в области повышения так называемой критической температуры — максимальной температуры, при которой в образце еще возможно протекание сверхпроводящего тока, за последние 15 лет, несмотря на колоссальные усилия ученых всего мира, не удалось сдвинуться с рекордного значения 23 К (для сплава Nb_3Ge) ни на один градус.

Но, может быть, явление сверхпроводимости принципиально невозможно при достаточно высоких температурах? Именно к такому выводу относительно обычной сверхпроводимости (обусловленной взаимодействием электронов посредством решетки) и склонялись ученые. Самые оптимистические прогнозы предсказывали предельно возможные значения критических температур порядка 30—40 К.

И вот в конце 1986 года научный мир был взбудоражен сенсационным сообщением об обнаружении нового ряда сверхпроводящих веществ с критическими температурами именно 30—40 К и даже выше. Этими долгожданными веществами оказались весьма сложные металлооксиды типа La—Sr—Cu—O, La—Pb—Cu—O, La—Ba—Cu—O. Впервые они были синтезированы швейцарскими учеными, но уже буквально через несколько месяцев их стали «печь» во многих лабораториях мира.

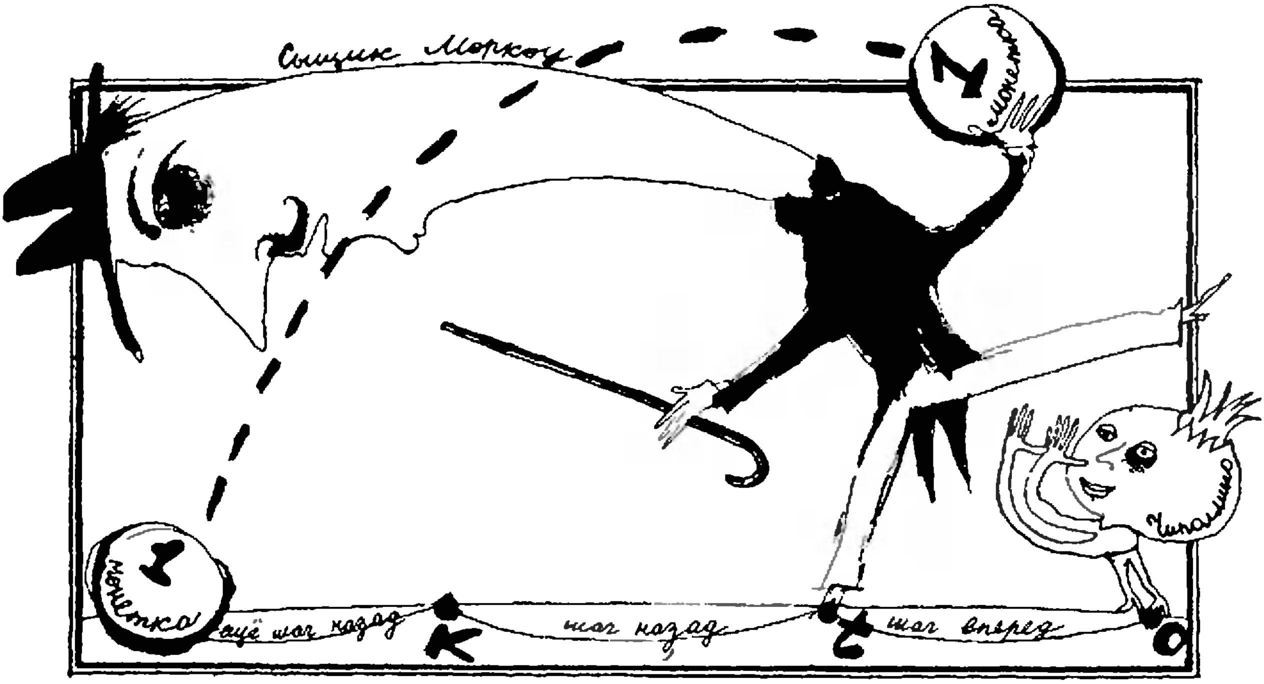
Подобно «золотой лихорадке» времен Клондайка, лихорадка поисков соединений с высокими критическими параметрами охватила ученых. Сведения о новых сверхпроводниках, с еще более высокой критической температурой, посыпались как из рога изобилия. Журнальные публикации не успевают за синтезом все новых и новых веществ с удивительными свойствами, известия о них немедленно передаются из лаборатории в лабораторию по телефону или, как во времена Гюйгенса и Ньютона, в письмах.

Уже поступили достоверные сообщения о достижении рекордной критической температуры в 120 К в соединениях типа Y—Ba—Cu—O. Успешные исследования в данном направлении ведутся и в нашей стране.

Вещества обнаруженного ряда представляют собой так называемую металлооксидную керамику. И проводимость в нормальном состоянии весьма невысока — по своим электрическим свойствам они являются плохими металлами, да и концентрация электронов проводимости в них невелика. Природа новой, высокотемпературной, сверхпроводимости пока остается неясной. Связана ли она с традиционным взаимодействием электронов друг с другом посредством решетки или обусловлена каким-то новым, неизвестным нам механизмом, еще неясно.

Объяснение обнаруженного феномена — дело будущего, однако практическую важность сделанного открытия переоценить трудно. Ведь теперь для охлаждения сверхпроводящих устройств можно будет перейти на использование дешевого и доступного жидкого азота (с температурой кипения 77 К). В результате можно ожидать настоящую революцию в целом ряде областей физики и техники, последствия которой до конца сегодня представить трудно.

Б. В.



Математический кружок

О случайных блужданиях

Кандидат физико-математических наук
С. И. СОБОЛЕВ

В радиопередаче по сказке Джанни Родари «Чиполлино и его друзья» сыщик мистер Моркоу ведет розыск спрятавшегося Чиполлино по принципу:

«Шаг назад, шаг вперед,
От нас разбойник не уйдет».

Этот принцип поиска можно было бы считать шуткой автора, если бы его эффективность не вытекала из одной теоремы теории вероятностей. Наша заметка посвящена этой теореме и примыкающим к ней задачам.

Случайные блуждания по прямой

Отметим целочисленные точки на прямой, возьмем монету и фишку. Представим себе, что в момент времени 0 в точке $a \in \mathbf{Z}$ стоит фишка. Бросим монету. Если она выпадет гербом, передвинем фишку на 1 вправо, если решкой, то на 1 влево. А дальше снова бросаем монету и поступаем по этому правилу и т. д. Если монета не имеет дефектов, то фишка, в момент времени t ($t = 0, 1, 2, \ldots$) стоящая в точке $k \in \mathbf{Z}$, в следующий момент времени $t+1$ с вероятностью $1/2$ окажется в точке $k+1$ или с той же вероятностью окажется в точке $(k-1)$*).

Описанный процесс называется *симметричным случайным блужданием* по множеству $\mathbf{Z}$ целых точек прямой, начинающимся в точке a. Такое блуждание называется симметричным потому, что у монетки герб и решка равноправны.

Немного уточняя ситуацию из сказки Джанни Родари, будем считать, что сыщик Моркоу в розысках Чиполлино совершает симметричное случайное блуждание по множеству $\mathbf{Z}$ (с помощью монетки).

---

*) *Вероятность $p(x)$* события x — это некоторая численная характеристика возможности наступления этого события. Вероятность невозможного события принимается равной 0, достоверного события — равной 1, а вообще $0 \leqslant p(x) \leqslant 1$. В сложных ситуациях вероятность определяется аксиоматически, однако в этой заметке аксиоматическую теорию нам заменит небольшая доза здравого смысла. В частности, если несколько событий равновозможны, то их вероятности одинаковы; например, вероятность выпадения двойки (или пятерки) на нежульнической игральной кости равна, конечно же, 1/6, вероятность выпадения орла на негнутой монете — 1/2.

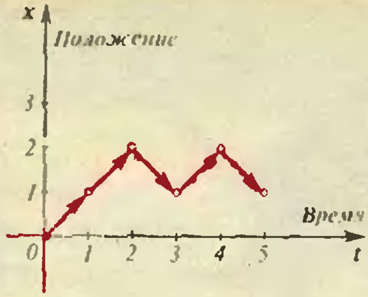


Рис. 1.

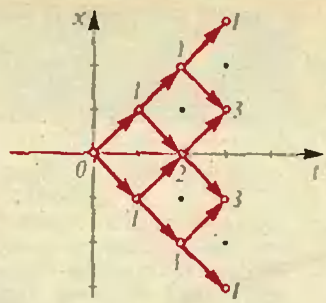


Рис. 2.

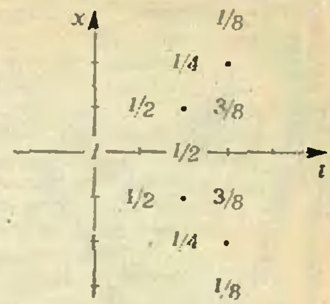


Рис. 3.

Задание 1. *Возьмите монету и фишку, фишку поставьте в точку 0. Бросьте монету, передвиньте фишку и запишите ее положение. Повторите до 10 раз. В результате вы должны получить строчку из последовательных положений фишки.*

Конкретное блуждание можно наглядно изобразить, нарисовав его траекторию. Положение фишки в момент времени t в точке k отметим точкой M_t с координатами $(t; k)$ на плоскости с прямоугольной декартовой системой координат. Соединив стрелкой точку M_t с точкой M_{t+1} $(t=0, 1, 2, \ldots)$, мы и получим наглядное изображение траектории фишки.

Например, если при бросании монеты выпали последовательно Г, Г, Р, Г, Р, а начальное положение фишки было в точке 0, то последовательные положения такие:

время	0	1	2	3	4	5
положение фишки	0	1	2	1	2	1

и траектория выглядит так, как показано на рисунке 1.

Задание 2. *Нарисуйте траекторию, изображающую блуждание фишки из задания 1.*

Вероятность попадания в данную точку

Пусть блуждание фишки по прямой начинается в точке 0. Интересным является вопрос, с какой вероятностью в момент времени t фишка окажется в положении k. Иначе говоря, с какой вероятностью t-звенная траектория приходит в точку $(t; k)$? Обозначим эту вероятность $P_t(k)$. Ответ на поставленный вопрос зависит от числа $S_t(k)$ траекторий, ведущих из точки $(0; 0)$ в точку $(t; k)$.

Напишем около каждой точки $(t; k)$, в которую приходит хотя бы одна траектория, число $S_t(k)$, показывающее сколько траекторий ведет в эту точку для $t=0, 1, 2, 3$ (рис. 2).

Задание 3. *Продолжите рисунок 2 для* $t=4, 5, 6$.

Можно подметить следующее. В точку $(t; k)$ могут идти стрелки только из точек $(t-1; k-1)$ и $(t-1; k+1)$, и больше ниоткуда. Поэтому

$$S_t(k)=S_{t-1}(k-1)+S_{t-1}(k+1). \qquad (1)$$

Таблица, состоящая из чисел $S_t(k)$, начало которой мы нарисовали, оказывается так называемым *треугольником Паскаля*. Она вся, столбик за столбиком, порождается условием $S_0(0)=1$ и соотношением (1). Например:

$$S_1(-1)=S_0(-2)+S_0(0)=0+1=1,$$
$$S_1(1)=S_0(0)+S_0(2)=1+0=1,$$
$$S_2(-2)=S_1(-3)+S_1(-1)=0+1=1,$$
$$S_2(0)=S_1(-1)+S_1(1)=1+1=2,$$
$$S_2(2)=S_1(1)+S_1(3)=1+0=1,$$

и так далее.

Конечно, t-звенных траекторий в два раза больше, чем $(t-1)$-звенных — ведь каждая $(t-1)$-звенная траектория порождает две t-звенных. Поэтому однозвенных траекторий 2, двузвенных — 4 и так далее, t-звенных траекторий — 2^t. Все 2^t t-звенных траекторий — равновозможные траектории движения фишки (поскольку герб *Г* и решка *Р* — равновозможные исходы бросания монеты), из них $S_t(k)$ траекторий приходит в точку $(t; k)$. Поэтому вероятность $P_t(k)$, с которой t-звенная траектория приходит в точку $(t; k)$, равна $S_t(k)/2^t$. Около точки $(t; k)$, в которую приходит хотя бы одна траектория, выпишем вероятность $P_t(k)$. Полученную таблицу назовем *треугольником вероятностей*. Поделив равенство (1) на 2^t, получим *закон* *полусуммы*

$$P_t(k)=\frac{1}{2}P_{t-1}(k-1)+\frac{1}{2}P_{t-1}(k+1), \quad (2)$$

порождающий (с использованием условия $P_0(0)\geqslant 1$) весь треугольник вероятностей (рис. 3).

Задание 4. *Продолжите треугольник вероятностей $P_t(k)$ вправо, выписав его для $t=4, 5, 6$.*

Формула (2) учитывает, что:

1) фишка может быть в момент времени t в положении k только если она была в момент времени $t-1$ в одном из соседних положений $k-1$ *или* $k+1$;

2) переходы из положения $k-1$ в положение $k+1$ или из положения $k+1$ в *положение k происходят* с вероятностями 1/2 (поэтому перед $P_{t-1}(k-1)$ и $P_{t-1}(k+1)$ и стоят коэффициенты 1/2).

Следующие два задания предназначены для тех, кто знаком с определением числа сочетаний и знает формулу бинома.

Задание 5. *Докажите, что*

$$P_n(k)=C_n^{\frac{n+k}{2}}/2^n,$$

где C_n^m — число сочетаний из n элементов по m.

Задание 6. а) *Проверьте для $t=1, 2, 3, 4$, что коэффициент при x^k в разложении многочлена*

$$\frac{1}{2^n}\left(x+\frac{1}{x}\right)^t$$

по степеням x равен $P_t(k)$. б) *Докажите утверждение пункта а) для любого натурального t.*

Попадется ли Чиполлино?

Пусть в точке 0 на прямой спрятался Чиполлино, а в точке k находится мистер Моркоу. Мы предположили, что сыщик, разыскивая Чиполлино, совершает симметричное случайное блуждание, начинающееся в момент времени 0 в точке k на прямой. С какой вероятностью мистер Моркоу когда-нибудь найдет Чиполлино, т. е. окажется в точке 0?

Обозначим эту вероятность $P(k)$. Как и всякая вероятность, $P(k)$ — какая-то часть единицы:

$$0\leqslant P(k)\leqslant 1.$$

Заметим, что $P(0)\geqslant 1$ (если $k=0$, то уже в момент времени 0 сыщик и Чиполлино находятся в одной точке,

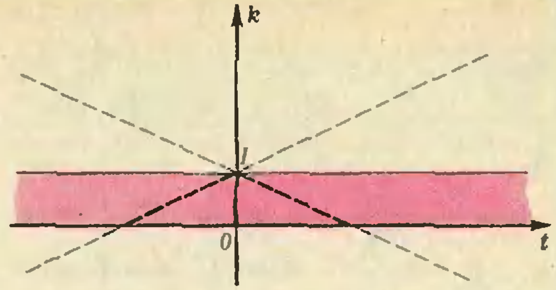


Рис. 4.

поимка — достоверное событие, а его вероятность равна 1). Если $k\neq 1$, то поскольку из точки k сыщик может попасть когда-нибудь в точку 0 только, пройдя в следующий момент времени после выхода из точки k через соседние точки $k-1$ и $k+1$, оказывается справедливым тот же самый закон полусуммы:

$$P(k)=\frac{1}{2}P(k-1)+\frac{1}{2}P(k+1).$$

Здесь учтено, что переход за единицу времени из точки k в точку $k-1$ происходит с вероятностью 1/2; то же верно для перехода из точки k в точку $k+1$.

Рассмотрим точки $M_k(k;\ p(k))$ на плоскости с прямоугольной декартовой системой координат xOy. Поскольку середина отрезка, соединяющего точки $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$, есть точка

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2};\ \frac{y_1+y_2}{2}\right),$$

ясно, что точка M_k (где $k\neq 0$) является серединой отрезка $M_{k-1}M_{k+1}$. Следовательно, точки M_k, где $k\geqslant 0$, лежат на одном луче, и точки M_k, где $k\leqslant 0$, тоже лежат на одном луче. Оба этих луча выходят из точки $M_0(0;\ 1)$ (так как $P(0)\geqslant 1$) и лежат в полосе $0\leqslant y\leqslant 1$ (так как $0\leqslant P(k)\leqslant 1$ для любого k), закрашенной на рисунке 4. Следовательно, они составляют прямую $y=1$. Все точки $M_k(k;\ P(k))$ лежат на этой прямой, поэтому $P(k)\geqslant 1$ для любого k.

Итак, мы доказали, что сыщик с вероятностью 1 рано или поздно найдет Чиполлино, из какой бы точки k он ни начинал блуждание!

Читатель может спросить — а что если при бросании монеты все время будет выпадать единица, ведь тогда сыщик уйдет вправо по прямой и никогда не найдет Чиполлино? Конечно, такое блуждание логически возможно, но вероятность, что произойдет блуждание, не приводящее в точку 0, равна 0. Это — доказанная нами теорема. Вопрос о ее приложи-

Рис. 5.

мости к «реальной действительности» — тонкий вопрос, мы его здесь обсуждать не будем.

Случайные блуждания на плоскости и в пространстве

Рассмотрим на плоскости треугольную сетку; возьмем фишку и (недеформированную) игральную кость. Шесть направлений движений по сетке обозначим цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, как показано на рисунке 5. Поставим фишку в один из узлов сетки и бросим кость. Передвинем фишку в соседний узел по направлению, отвечающему показанию кости. А дальше снова бросаем кость и поступаем по этому правилу и т. д. Этот процесс называется *симметричным случайным блужданием* по плоской треугольной сетке.

Предположим, что Чиполлино спрятался в одном из узлов сетки, а сыщик мистер Моркоу совершает случайные симметричные блуждания по сетке; найдет ли он Чиполлино? Оказывается, что и в этом случае *сыщик находит свою жертву с вероятностью единица*. Это тоже математическая теорема из теории вероятностей, известная под образным названием «все дороги ведут в Рим». Ее доказательство мы не приводим — оно несколько сложнее доказательства теоремы о случайном блуждании на прямой. Результат будет тем же для плоской квадратной сетки (вместо обычной игральной кости придется пользоваться «костью» в форме правильного тетраэдра).

Однако если перейти к кубической сетке в пространстве и аналогично определить на ней симметричное случайное блуждание (здесь снова подойдет обычная игральная кость — ведь из каждой вершины кубической сетки выходит шесть ребер), то результат оказывается совсем другим. Если Чиполлино спрячется далеко от сыщика, то вероятность поимки становится ничтожно малой. Это уже трудная теорема, об ее доказательстве мы говорить ничего не будем.

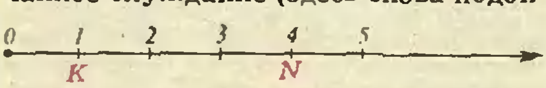


Рис. 6.

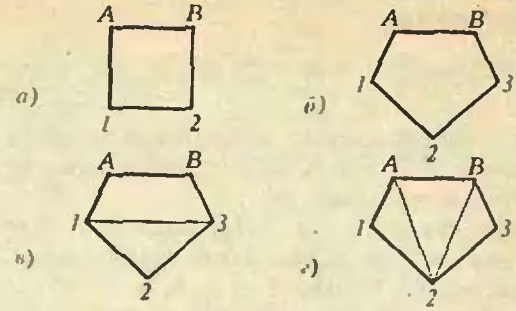


Рис. 7.

Два слова о приложениях

Игровой сюжет этой заметки не должен вводить читателя в заблуждение. Теория случайных блужданий — важный и очень полезный раздел теории вероятностей. Она с успехом применяется при изучении различных процессов развития (в физике, в химии и даже в экономике). Особенно в последние годы, когда случайные процессы легко моделируются на ЭВМ с помощью датчиков случайных чисел. Эффектные и неожиданные приложения она получает в практическом нахождении решений конкретных дифференциальных уравнений с помощью так называемого метода Монте Карло. Но это предмет для отдельного рассказа.

В заключение предлагаем два задания.

Задание 7. *Чиполлино спрятался в точке 0, в точке N находится пропасть, а сыщик Моркоу находится в точке k ($k \in \mathbb{Z}$, $0 < k < N$). Сыщик ищет Чиполлино прежним образом. Если он попадет в точку 0, то найдет Чиполлино, а если попадет в точку N, то свалится в пропасть (рис. 6). С какой вероятностью сыщик найдет Чиполлино? С какой вероятностью сыщик свалится в пропасть?*

Указание: Докажите, что (в прежних обозначениях)

$$P(k) = \frac{1}{2}P(k-1) + \frac{1}{2}P(k+1),$$

где $k=1, 2, ..., N-1$; $P(0)=1$, $P(N)=0$. Как расположены точки $M_k(k; P(k))$, где $k=0,1, ..., N$? Ответ на первый вопрос: $P(k)>1-k/N$. Чтобы ответить на второй вопрос, можно поменять местами пропасть и Чиполлино. Покажите, что ответ дает число $P(N-k)-k/N$.

Задание 8. *Несколько прутиков связаны так, как показано на рисунках 7 а)—г). В точке 1 сидит гусеница. Точки A и B смазаны клеем. Гусеница движется по следующему закону. Если она попадет в точку A или в точку B, то в этой точке приклеивается. Если она находится в одной из точек (отличных от A и B), из которой выходит m прутиков, то она выбирает один из этих прутиков с вероятностью 1/m и ползет до его конца, а дальше снова действует, как описано. С какой вероятностью гусеница когда-нибудь приклеится в точке A? в точке B? где-нибудь?*

Указание. Пусть $P(k)$ — вероятность того, что гусеница, выходя из точки k, когда-нибудь приклеится в точке A. Исходя из закона движения, получаем систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$P(1)=\frac{1}{3}P(2)+\frac{1}{3}P(3)+\frac{1}{3}\cdot 1,$$

$$P(2)=\frac{1}{2}P(1)+\frac{1}{2}P(3),$$

$$P(3)=\frac{1}{3}P(1)+\frac{1}{3}P(3)+\frac{1}{3}\cdot 0,$$

откуда находим $P(1)$, $P(2)$ и $P(3)$.

Замечание. Задания 8 а) и 8 б) — это задание 7 в случаях $N=4$ и $N=5$ соответственно. Действительно, по прутику AB гусеница двигаться не может. Поэтому его можно убрать. Тогда, развернув прутики, конструкции на рисунках 7, а), б) можно превратить в ту конструкцию, которая показана на рисунке 6.

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=7, \\ x^2+xz+z^2=21, \\ y^2+yz+z^2=28. \end{cases}$$

2. Докажите, что круги, построенные на сторонах выпуклого четырехугольника, как на диаметрах, покрывают этот четырехугольник.

3. В арифметической прогрессии, составленной из натуральных чисел, есть член, оканчивающийся цифрой 3, но нет члена, оканчивающегося цифрой 5. Есть ли в ней член, оканчивающийся цифрой 7?

4. Из карьера нужно вывезти 870 т гранитных глыб. Докажите, что если каждая глыба весит не более 8 т, то для перевозки достаточно 17 платформ, грузоподъемностью 58 т каждая.

5. Докажите, что существует бесконечно много целых чисел, которые являются точными квадратами и остаются таковыми после приписывания к ним справа единицы (в десятичной записи).

Девятый класс

6. Числа x, y, z удовлетворяют соотношениям $x+y+z=a$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$. Докажите, что по крайней мере одно из чисел x, y, z равно a.

7. Разложите число 1987 в сумму натуральных чисел таким образом, чтобы произведение этих чисел было максимальным.

8. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1 такие, что $BA_1:A_1C=CB_1:B_1A=AC_1:C_1B=1:2$. При пересечении отрезков AA_1, BB_1, CC_1 образуется треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади треугольника ABC.

9. На сторонах произвольного треугольника как на основаниях построены во внешнюю сторону равносторонние треугольники. Докажите, что их центры являются вершинами равностороннего треугольника.

10. Многочлен

а) ax^2+bx+c,

б) ax^3+bx^2+cx+d

принимает при любом целом x целое значение. Какими могут быть его коэффициенты (например, обязательно ли они являются целыми)?

Десятый класс

11. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x=y^2+ay+b, \\ y=x^2+ax+b. \end{cases}$$

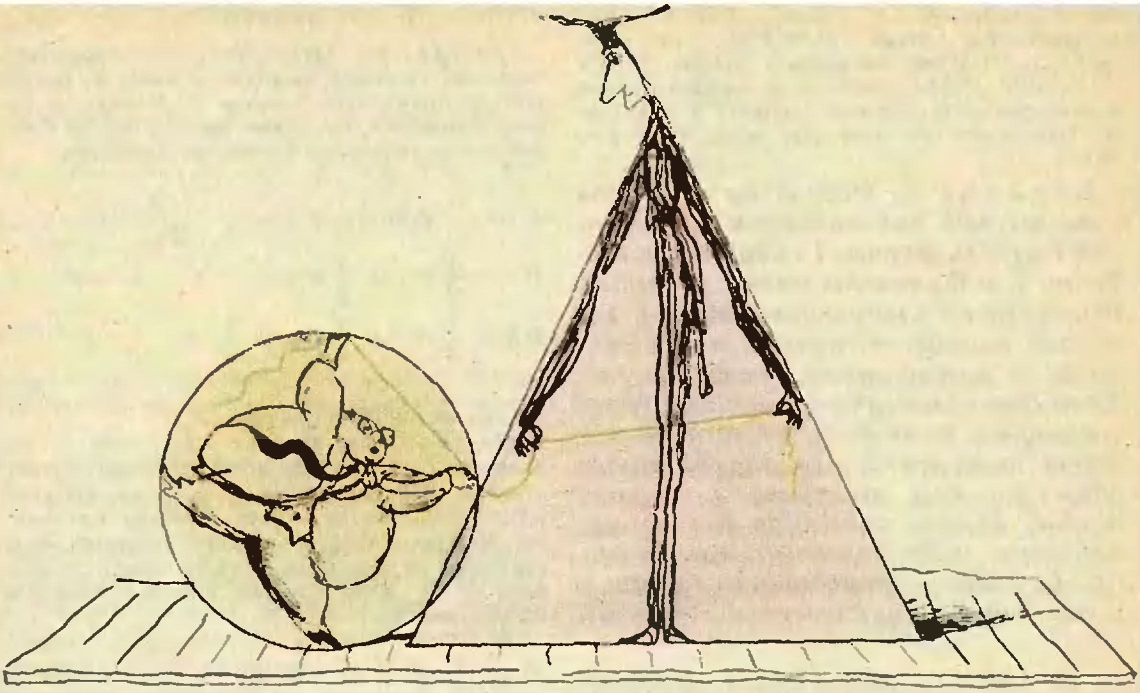
12. Докажите равенство $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

13. Какой из треугольников, вписанных в данную окружность, имеет наибольший периметр?

14. Даны несколько положительных чисел, сумма которых равна 3 и сумма квадратов которых равна 1. Докажите, что среди этих чисел найдутся три, сумма которых не меньше 1.

15. Докажите, что сумма углов пространственного неплоского четырехугольника меньше 360°.

Публикацию подготовили
Л. Д. Курляндчик и Д. Б. Фукс



Практикум абитуриента

Правильное решение геометрической задачи

Кандидат педагогических наук
Э. Г. ГОТМАН

Как известно, при решении геометрической задачи необходимо рассмотреть все возможные случаи взаимного расположения элементов фигуры. Решение задачи, допускающей различные конфигурации, будет неполным и ошибочным, если ограничиться рассмотрением лишь одного из возможных случаев. Решая такие задачи, важно не ошибиться, приняв частное за общее.

С подобными ошибками сталкиваются учителя на уроках, члены жюри олимпиад. Задачи с неполными и неверными решениями встречаются и в литературе для учащихся.

Приведем несколько примеров, взятых нами из различных сборников олимпиадных задач.

Задача 1. *Впишите в данный треугольник ABC прямоугольник с наименьшей диагональю.*

Решение. Пусть в треугольник ABC вписан прямоугольник $KLMN$ так, что его сторона KL лежит на прямой BC, а вершины M и N — на сторонах AC и AB (рис. 1,а). Пусть AD — высота треугольника ABC. Построим треугольник $A'B'C'$ с прямым углом C' так, чтобы стороны BC и $B'C'$ были равны и располагались на одной прямой, и чтобы прямые AA' и BC были параллельны (рис. 1,б). Тогда $A'C'=AD=h$.

Докажем, что если в треугольники ABC и $A'B'C'$ вписаны прямоугольники $KLMN$ и $K'L'M'N'$, имеющие равные высоты KN и $K'N'$, то эти прямоугольники равны.

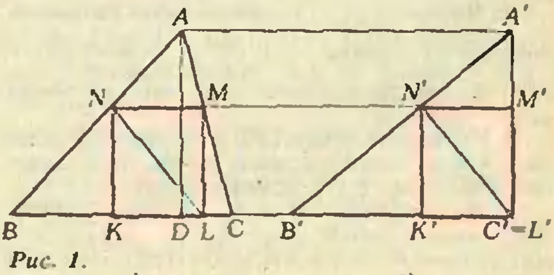


Рис. 1.

Пусть $BC=a$. Из подобия треугольников ANM и ABC имеем

$$MN = \frac{a}{h}(h-x),\text{ где } x = KN.$$

Аналогично найдем, что

$$M'N' = \frac{a}{h}(h - x).$$

Значит, $MN = M'N'$, и задача сводится к более простой: *в прямоугольный треугольник $A'B'C'$ вписать прямоугольник с наименьшей диагональю.*

Ясно, что диагональ вписанного в прямоугольный треугольник $A'B'C'$ прямоугольника, угол которого совпадает с углом C', будет наименьшей, если она перпендикулярна гипотенузе $A'B'$. Любой другой прямоугольник будет иметь бо́льшую диагональ, так как его диагональ, являясь наклонной к гипотенузе $A'B'$, больше перпендикуляра к $A'B'$.

Отсюда следует построение и в общем случае, поскольку $KN = K'N'$. При этом ясно, что длина наименьшей диагонали искомого прямоугольника (две вершины которого лежат на стороне BC) равна $\frac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$. Кроме того, поскольку диагональ $L'N'$ прямоугольника $K'N'M'L'$ перпендикулярна $A'B'$ (см. рис. 1, *б*), треугольники $K'N'L'$ и $A'B'C'$ подобны, так что $\frac{K'N'}{K'L'} = \frac{B'C'}{A'C'} = \frac{a}{h}$, т. е. у искомого прямоугольника $KLMN$ отношение сторон $\frac{KN}{KL} = \frac{a}{h}$.

Казалось бы, задача решена. Но это не так. Чтобы получить полное решение задачи, следует рассмотреть еще два случая: когда две вершины вписанного прямоугольника лежат на прямой AC и когда — на прямой AB, а затем сравнить результаты.

Пусть S — площадь треугольника ABC, a, b, c — длины его сторон, h_a, h_b, h_c — соответствующие им высоты.

Как мы уже доказали, наименьшее значение длины диагонали прямоугольника, вписанного в треугольник ABC так, что две его вершины лежат на прямой BC, равно

$$d_1 = \frac{ah_a}{\sqrt{a^2+h_a^2}} = \frac{2S}{\sqrt{a^2+h_a^2}}.$$

Следовательно, если две вершины прямоугольника лежат на прямой AC, то его диагональ имеет наименьшую длину, равную

$$d_2 = \frac{2S}{\sqrt{b^2+h_b^2}}.$$

Будем считать, что данный треугольник разносторонний, и $a>b>c$. Сравним выражения $a^2+h_a^2$ и $b^2+h_b^2$:

$$(a^2+h_a^2)-(b^2+h_b^2) = (a^2-b^2)+(h_a^2-h_b^2) = (a^2-b^2)+\left(\left(\frac{2S}{a}\right)^2-\left(\frac{2S}{b}\right)^2\right) = a^2-b^2+\left(\frac{4S^2}{a^2}-\frac{4S^2}{b^2}\right) = (a^2-b^2)\left(1-\frac{4S^2}{a^2b^2}\right)>0,$$

поскольку $a>b$ и $2S<ab$.

Поскольку $a^2+h_a^2 > b^2+h_b^2$, и значит, если $a>b$, то $d_1<d_2$.

В результате проведенного исследования можно сделать следующий окончательный **вывод**: из всех прямоугольников $KLMN$ вписанных в данный треугольник ABC, наименьшую диагональ имеет прямоугольник, две вершины которого лежат на **бо́льшей** стороне BC треугольника, и отношение сторон которого $\frac{KN}{KL} = \frac{a}{h}$.

Предлагаем читателям самостоятельно решить

Упражнение 1. Впишите в данный треугольник ABC прямоугольник, диагональ которого имеет данную длину d. Сколько решений может иметь задача?

Задача 2. *Через вершину A треугольника ABC проведите прямую так, чтобы сумма расстояний до этой прямой от вершин B и C треугольника была наибольшей.*

Решение. Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABEC$ (рис. 2). Пусть l — прямая, проведенная через вершину A, l' — парал-

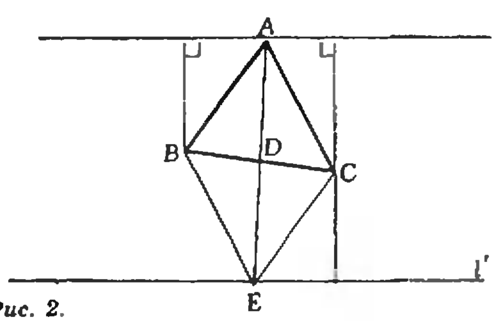


Рис. 2.

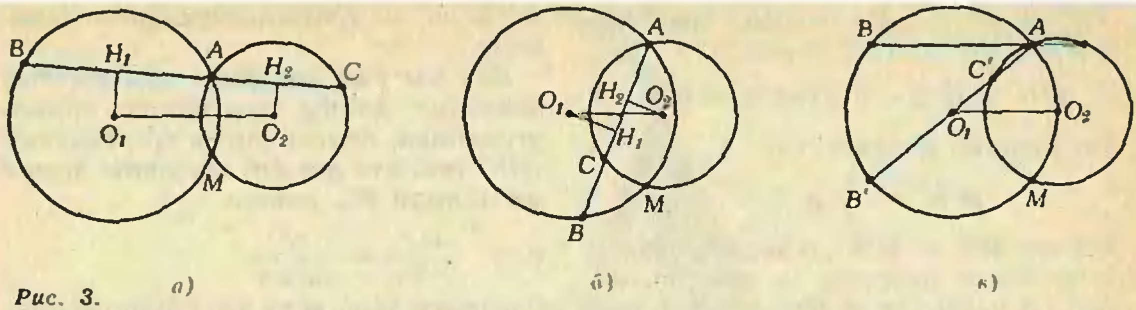


Рис. 3.

лельная ей прямая, проведенная через вершину E. Очевидно, расстояние от вершины B до прямой l равно расстоянию от вершины C до прямой l'. Значит, сумма интересующих нас расстояний равна расстоянию между прямыми l и l', т. е. расстоянию от точки E до прямой l. Это расстояние будет наибольшим, если прямая l перпендикулярна прямой AE, т. е. перпендикулярна медиане AD треугольника ABC, проведенной из вершины A. При этом интересующее нас наибольшее значение суммы расстояний равно $2AD$.

Рассуждение на первый взгляд не вызывает сомнений. Тем не менее в нем имеется ошибка. Для правильного решения задачи необходимо рассмотреть два возможных случая: 1) прямая l пересекает сторону BC треугольника; 2) прямая l сторону BC не пересекает. В первом случае рассуждение теряет силу (сделайте рисунок!). В этом случае сумма расстояний d_1 от вершин B и C до прямой l не больше BC и $d_1=BC$ тогда и только тогда, когда прямая l перпендикулярна стороне BC. Во втором же случае сумма расстояний d_2 не больше $AE=2AD$ и $d_2=2AD$ только тогда, когда прямая l перпендикулярна медиане AD. Остается сравнить d_1 и d_2. Получается следующий ответ:

если угол A больше $90°$, то сумма расстояний от вершин B и C принимает наибольшее значение для прямой l, перпендикулярной стороне BC (и проходящей через вершину A);

если угол A меньше $90°$, то наибольшее значение суммы расстояний от вершин B и C достигается для прямой l, перпендикулярной медиане AD (и проходящей через вершину A);

если угол A равен $90°$, то наибольшее значение суммы расстояний от вершин B и C достигается для двух прямых l_1 и l_2, перпендикулярных соответственно прямым BC и AD (и проходящих через вершину A).

Отметим, что наше первоначальное рассуждение (приведшее к выводу «l перпендикулярна AD») неверно даже и для одного случая — когда прямая l лежит вне треугольника и не пересекает сторону BC. Действительно, угол BAD может быть тупым, и если через вершину A провести прямую l перпендикулярно AD, она пересечет сторону BC.

Упражнение 2. Через вершину A треугольника ABC проведите прямую так, чтобы сумма расстояний до этой прямой от вершин B и C треугольника была наименьшей.

Задача 3. *Через точку пересечения двух окружностей проведите секущую так, чтобы ее часть, заключенная внутри кругов, была наибольшей.*

Решение. Пусть данные окружности пересекаются в точках A и M (рис. 3, а). Проведем через точку A произвольную прямую, пересекающую окружность с центром O_1 в точке B, а окружность с центром O_2 — в точке C. Проведем перпендикуляры O_1H_1 и O_2H_2 к прямой BC. Легко видеть, что $BC=2H_1H_2$. Поскольку H_1H_2 — ортогональная проекция отрезка O_1O_2 на прямую BC, $H_1H_2=O_1O_2\cos\alpha$, где α — угол между секущей BC и линией центров O_1O_2, так что

$$BC=2O_1O_2\cdot\cos\alpha,$$

и отрезок BC имеет наибольшую длину, равную $2O_1O_2$, тогда и только тогда, когда $\alpha=0$, т. е. секущая BC параллельна прямой O_1O_2.

Приведенное рассуждение, однако, неверно. Дело в том, что в задаче говорится не об отрезке BC, а об отрезке секущей, заключенном внутри кругов. Возможны три случая расположения точек B и C: секущую можно провести так, что эти точки будут лежать

1) по разные стороны от точки A (рис. 3, а);

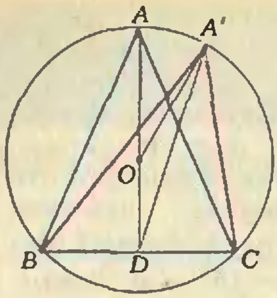


Рис. 4.

2) по одну сторону от точки A (рис. 3, *б*);

3) одна из них, например, точка C будет совпадать с точкой A (сделайте рисунок).

В случае, если точка C лежит м е ж д у точками A и B (рис. 3, *б*), отрезком секущей, заключенным внутри кругов, является не отрезок BC, а отрезок AB — хорда окружности! Хорда же имеет наибольшую длину, если она проходит через центр и является диаметром окружности. Таким образом, следует еще выяснить, какой из отрезков больше: отрезок, параллельный прямой O_1O_2, длина которого равна $2O_1O_2$ (убедитесь самостоятельно, что во всех перечисленных случаях $BC=2H_1H_2$), или же диаметр $2R$ бо́льшей окружности (рис. 3, *в*). Окончательно получается следующий о т в е т:

если $O_1O_2>R$, то секущую следует провести параллельно линии центров O_1O_2;

если $O_1O_2<R$, то секущую следует провести через центр бо́льшей окружности;

если $O_1O_2=R$, то условию задачи удовлетворяют д в е прямые, одна из которых параллельна O_1O_2, а другая проходит через центр бо́льшей окружности (рис. 3, *в*).

Для окружностей одинакового радиуса получается аналогичный ответ, только в случаях $O_1O_2\leqslant R$ к указанным прямым добавляется еще прямая, проходящая через центр второй окружности.

У п р а ж н е н и е 3. Через точку пересечения двух окружностей проведите секущую так, чтобы ее часть, заключенная внутри кругов, была наименьшей.

В качестве упражнений приведем еще несколько задач с «решениями», в которых читателю предлагается самостоятельно найти ошибку.

З а д а ч а 4. *Из всех треугольников ABC с данным основанием BC и данным углом при вершине A найдите треугольник, имеющий наибольшую медиану, проведенную к основанию.*

«Р е ш е н и е». Пусть ABC — равнобедренный треугольник и $A'BC$ произвольный треугольник, имеющий с треугольником ABC общее основание BC и угол A', равный углу A (рис. 4). Тогда точка A' лежит на дуге BAC окружности, описанной около треугольника ABC. Обозначим центр этой окружности через O и середину стороны BC через D. Медиана AD равнобедренного треугольника ABC является его осью симметрии. Поэтому точка O лежит на AD и, следовательно, $AD=AO+OD$. Из треугольника $A'OD$ имеем $A'D<A'O+OD=AO+$ $+OD=AD$. Значит, из всех треугольников ABC с данным основанием BC и постоянным углом A при вершине наибольшую медиану имеет равнобедренный.

З а д а ч а 5. *Из всех треугольников ABC с данным основанием BC и постоянной высотой AH найдите треугольник, около которого можно описать окружность наименьшего радиуса.*

«Р е ш е н и е». Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием BC и постоянной высотой AH, и A_1BC— произвольный треугольник с такой же высотой, точки A и A_1 лежат на прямой l, параллельной прямой BC (рис. 5). Окружность, описанная около треугольника ABC, касается l в точ-

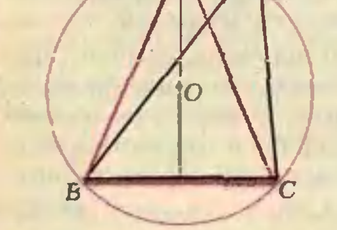


Рис. 5.

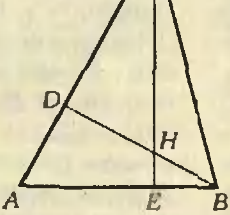


Рис. 6.

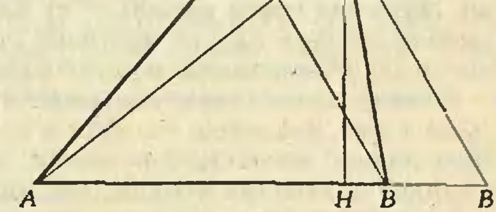


Рис. 7.

ке A, значит, точка A_1 лежит вне этой окружности. Поэтому угол A больше угла A_1.

Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, вычисляется по формуле $R=\frac{a}{2\sin\hat{A}}$ $(a=BC)$. А так как $\sin\hat{A}>\sin\hat{A}_1$, то наименьший радиус имеет окружность, описанная около равнобедренного треугольника.

Ответ: равнобедренный треугольник с основанием BC и данной высотой.

Задача 6. *Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $CH=AB$. Найдите угол при вершине C.*

«Решение». Пусть BD и CE — высоты треугольника ABC (рис. 6). Поскольку треугольники ABD и CDH имеют равные гипотенузы ($AB=CH$) и равные острые углы ($\angle ABD=90°-\angle BAC=\angle ACE$), они равны. Поэтому $BD=CD$. Значит, прямоугольный треугольник BCD — равнобедренный, следовательно, $\angle ACB=45°$.

Задача 7. *Определите площадь трапеции по двум диагоналям 17 см и 113 см и высоте 15 см.*

«Решение». Пусть $ABCD$ — данная трапеция, CH — ее высота (рис. 7). Проведем $CB'\parallel BD$ до пересечения с AB в точке B'. Четырехугольник $BDCB'$ — параллелограмм, так что

$$AB'=AB+BB'=AB+CD,$$

и поэтому площадь трапеции $ABCD$ равна площади треугольника $AB'C$.

Найдем AB'. Из прямоугольных треугольников ACH и $B'CH$ по теореме Пифагора находим $AH=\sqrt{113^2-15^2}=112$ (см), $B'H=\sqrt{17^2-15^2}=8$ (см), так что $AB'=AH+B'H=120$ (см), и искомая площадь трапеции равна 900 см^2.

В заключение мы можем дать такой общий совет: чтобы получить правильное решение геометрической задачи, решите ее для одного случая, а затем проверьте, годится ли найденное решение для всех других возможных случаев. Не забывайте, что треугольник может быть не только остроугольным, что центр описанной около треугольника окружности не всегда лежит внутри треугольника, что угол при большем основании трапеции может быть тупым и т. д. Иногда удается найти и такой подход к задаче, который, обладая общностью, позволяет получить решение, охватывающее все возможные случаи. Решение одной и той же задачи разными способами не только позволяет отыскивать наиболее простое и красивое решение задачи, но и служит эффективным средством контроля и проверки.

Из истории дробей

(Начало см. на с. 34)

числами. С дробями они предоставляли возиться купцам, ремесленникам, а также землемерам, астрономам и механикам. Но старая пословица говорит: «Гони природу в дверь, она влетит в окно». Поэтому и в строго научные сочинения греков дроби проникали, так сказать, «с заднего хода». Кроме арифметики и геометрии, в греческую математику входила ... музыка. Музыкой греки называли ту часть нашей арифметики, в которой говорится об отношениях и пропорциях.

Почему такое странное название? Дело в том, что греки создали и научную теорию музыки. Они знали: чем длиннее натянутая струна, тем ниже, «толще» получается звук, который она издает. Они знали, что короткая струна издает высокий звук. Но у всякого музыкального инструмента не одна, а несколько струн. Для того чтобы все струны при игре звучали «согласно», приятно для уха, длина звучащих частей их должна быть в определенном отношении. Например, чтобы высоты звуков, издаваемых двумя струнами, различались на *октаву*, нужно, чтобы их длины относились как 1:2. Подобным же образом *квинте* соответствует отношение 2:3, *кварте* — отношение 3:4 и т. д. Поэтому учение об отношениях, о дробях и связывалось у греков с музыкой.

Современную систему записи дробей с числителем и знаменателем создали в Индии. Только там писали знаменатель сверху, а числитель снизу и не писали дробной черты. А записывать дроби в точности, как сейчас, стали арабы.

Варианты вступительных экзаменов

Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. Высота правильной треугольной пирамиды равна h, а ее боковое ребро наклонено к плоскости основания пирамиды под углом φ. Найдите объем пирамиды.

2. Решите неравенство

$$\log_3 x + 1 \geqslant 3 \log_x 9.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{1+\sin x}{6}} + \sin x = 0.$$

4. Сторона ромба $ABCD$ равна a. Точки M и N являются соответственно серединами его сторон AB и CD, E — внутренняя точка стороны BC, а отрезки AE и MN пересекаются в точке O. Отношение площади четырехугольника $OECN$ к площади ромба $ABCD$ равно k и $\cos A = \frac{4k-1}{3}$. Найдите отрезок ED. При каких значениях k ромб, удовлетворяющий условиям задачи, существует?

5. Найдите сумму всех тех семизначных чисел, которые делятся на 15 и записываются лишь цифрами 0,1.

Вариант 2

(радиофизический факультет)

1. Решите неравенство

$$\log_{25}(6-x)\log_x 5 < 1.$$

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} - x/2\right).$$

3. Два сосуда наполняются жидкостями, плотности которых равны d и D. При этом они весят соответственно q и Q кг включая и вес самих сосудов. Найдите отношение объемов сосудов, если вес каждого из них составляет одинаковую часть веса жидкости, в нем находящейся.

4. Шар радиусом 2 касается всех ребер треугольной пирамиды. Центр шара лежит внутри пирамиды на ее высоте и расположен на расстоянии $2\sqrt{3}$ от вершины. Докажите, что пирамида правильная. Найдите высоту пирамиды.

5. Материальная точка M_1 движется со скоростью 2 м/с вдоль оси ox в отрицательном направлении, а материальная точка M_2 движется со скоростью 3 м/с вдоль прямой $y = \sqrt{3}x$ в направлении вектора $(1, \sqrt{3})$. В начальный момент времени точка M_1 имела координаты $(5; 0)$, а точка M_2 — координаты $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. В какой момент времени расстояние между точками будет минимальным?

Вариант 3

(химический факультет)

1. Из 40 т руды выплавляют 20 т металла, содержащего 6 % примесей. Какой процент примесей содержится в руде, если в шлаки, образующиеся при выплавке, металл не попадает?

2. Решите уравнение

$$\sin 2x - \cos 2x = 1 - 2(\cos x - \sin x).$$

3. Решите неравенство

$$2\log_2^2|x-1| + \log^2\frac{(x-1)^2}{8} \leqslant 9.$$

4. Сумма одиннадцати начальных членов геометрической прогрессии составляет 20 % суммы ее последующих одиннадцати членов. Во сколько раз первый член прогрессии меньше ее одиннадцатого члена?

5. Даны две правильные пирамиды с равными основаниями. Угол наклона бокового ребра к плоскости основания в первой из них в два раза больше угла наклона бокового ребра к плоскости основания во второй, а объем первой пирамиды в 4 раза больше объема второй. Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания в первой пирамиде.

Вариант 4

(биологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sin\frac{x}{2} + \cos x = 1.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{0{,}5}\frac{x-4}{2x+5} > 1.$$

3. Основание треугольника равно a. Найдите длину отрезка, делящего площадь треугольника пополам и параллельного основанию.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}(x+y)(x+y+z)=18,\\(y+z)(x+y+z)=30,\\(z+x)(x+y+z)=24.\end{cases}$$

5. Двугранный угол при основании правильной четырехугольной пирамиды равен α, а объем пирамиды равен v. Найдите площадь боковой грани пирамиды.

Задачи устного экзамена

1. Найдите все целые решения системы неравенств

$$\begin{cases}\frac{3}{x-2} \geqslant x,\\ \cos \pi x/2 < 0.\end{cases}$$

2. Если $|a| < 1$, то $1 + \frac{a}{2}$ является приближенным значением $\sqrt{1+a}$ с избытком, причем погрешность не превышает $\frac{a^2}{8}$. Докажите это.

3. Натуральные числа разбиты на группы следующим образом:

(1) (2,4) (3,5,7) (6,8,10,12) (9,11,13,15,17) ...

Сформулируйте правило построения групп. Найдите сумму всех чисел в n-й группе.

4. При каких значениях a, b функция

$$y = \frac{ax^2+bx+1}{x^2+bx+a}$$

является постоянной?

5. При каких значениях n функция

$$y=\frac{\sin nx}{\sin x/n}$$

имеет период 4π?

6. Сколько решений имеет уравнение

$$\sqrt[4]{x+a}+\log_5(x-5a)=0$$

в зависимости от значений параметра a?

7. Шестизначное число начинается с цифры 1. Если эту цифру переставить в конец числа, то новое число будет в три раза больше первоначального. Найдите число.

8. Даны три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Проведите через них три параллельные прямые, которые ограничивали бы две полосы одинаковой ширины.

9. Даны три точки A, B, C. Постройте окружность наименьшего радиуса так, чтобы точки A, B, C лежали на ней или внутри круга, ею ограниченного.

10. Постройте равносторонний треугольник по двум точкам, одна из которых — его вершина, а другая — центр.

11. Постройте квадрат по серединам двух смежных сторон.

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Небольшое тело скользит со скоростью $v=10$ м/с по горизонтальной поверхности, приближаясь к щели, образованной двумя отвесными вертикальными стенками, которые расположены на расстоянии $d=5$ см друг от друга. Скорость тела перпендикулярна стенкам, глубина щели $h=1$ м. Сколько раз упруго столкнется тело со стенками до момента падения на дно щели?

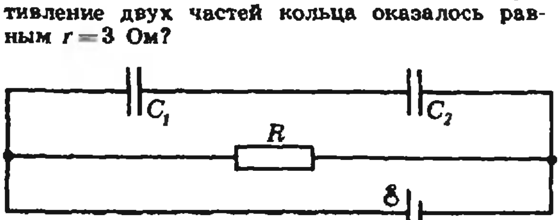
2. Цирковой гимнаст падает с высоты $H=1{,}5$ м на туго натянутую предохранительную сетку. Каков будет максимальный прогиб сетки, если покоящийся на ней гимнаст вдавливает ее на $h=0{,}1$ м?

3. Плотность нейтронной звезды $\rho=10^{17}$ кг/м^3. Вычислите минимальный период вращения ее спутника при его движении по окружности.

4. Посередине запаянной с двух концов трубки длиной $l=1$ м находится столбик ртути длиной $h=20$ см. При изменении положения трубки с горизонтального на вертикальное столбик смещается на $a=20$ см. До какого давления была откачана трубка? Плотность ртути $\rho=13600$ кг/м^3.

5. На электроплитке мощностью $N=1$ кВт кипит чайник с водой. Вычислите скорость истечения пара из его носика, если площадь сечения носика $S=1$ см^2, давление на выходе из носика равно нормальному атмосферному, все количество теплоты, выделяемое плиткой, передается воде без потерь, удельная теплота парообразования воды $r=2{,}26$ МДж/кг.

6. Сопротивление кольца из проволоки равно $R=160$ Ом. Концами двух проводников касаются кольца в двух точках A и B. Какую дугу отделяют эти точки, если общее сопротивление двух частей кольца оказалось равным $r=3$ Ом?



7. Найдите напряжения на конденсаторах емкостью C_1 и C_2 в приведенной на рисунке схеме, если известно, что при замыкании резистора сопротивлением R накоротко ток через батарею возрастает в $n=3$ раза. ЭДС батареи равна $\mathscr{E}$.

8. Изображение диапозитива на экране получают с помощью объектива с фокусным расстоянием $F=20$ см. Смещение диапозитива на $l=1/19$ см от его начального положения привело к потере четкости изображения, и для его восстановления пришлось на $L=20$ см увеличить расстояние от объектива до экрана. Вычислите начальное расстояние от объектива до экрана.

Радиофизический факультет

1. За какое время тело массой m соскользнет с наклонной плоскости высотой H и углом наклона α, если при угле наклона β тело соскальзывает равномерно?

2. Сила $F=20$ Н, действовавшая на покоящееся в начальный момент тело в течение $t=10^{-2}$ с, сообщила ему кинетическую энергию $E_1=3$ Дж. Какой окажется энергия тела по прошествии того же времени, если начальная скорость тела $v_0=10$ м/с, а сила действует в направлении этой скорости?

3. Куб с ребром $l=1$ м плавает в воде так, что его нижняя грань погружена на $H=25$ см. При нагружении его камнем с объемом $V=10$ дм^3 глубина погружения куба возросла на $h=2$ см. Вычислите плотности куба и камня.

4. Масса $m=0{,}716$ г органического соединения $(C_3H_6O)_n$ при давлении $p=10^5$ Па и температуре $t=200$ °C занимает в газообразном состоянии объем $V=243$ см^3. Вычислите значение n.

5. Два заряда $q_1=+1$ нКл и $q_2=-10$ нКл удалены на расстояние $l=55$ см. Вычислите напряженность электрического поля на линии, соединяющей заряды, в той точке, где потенциал поля равен нулю.

6. Какой ток пойдет по подводящим проводам при коротком замыкании, если на двух электроплитках с сопротивлениями $R_1=200$ Ом и $R_2=500$ Ом при их поочередном включении выделяется одинаковая мощность $N=200$ Вт?

7. Один и тот же предмет фотографируют с расстояний $d_1=90$ см и $d_2=165$ см. Высота изображений на снимках получилась равной $h_1=4$ см и $h_2=2$ см соответственно. Вычислите фокусное расстояние объектива фотоаппарата.

Публикацию подготовили *А. Ф. Гуменюк, К. В. Корсак, В. И. Сущанский*

Московский энергетический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$\left[\left(\frac{x}{x^2-4}-\frac{8}{x^2+2x}\right)\cdot\frac{x^2-2x}{4-x}+\frac{x+8}{x+2}\right]\cdot(x+2).$$

2. Решите графически систему неравенств

$$\begin{cases}x+y\leqslant 1,\\ y+x^2\geqslant 0,\\ x-x^2\geqslant 0.\end{cases}$$

3. Имеются два сплава золота и серебра. В первом сплаве количества этих металлов находится в отношении 3:2, в другом — в отношении 2:3. Сколько граммов нужно взять от каждого сплава, чтобы получить 24 г нового сплава, в котором золото и серебро находятся в отношении 5:7?

4. Найдите все корни уравнения

$$\cos 2x - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0,$$

лежащие на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

5. В конус вписан шар. Найдите объем конуса, если радиус шара равен R, а угол между высотой и образующей конуса равен α.

Вариант 2

1. Упростите выражение

$$\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{3}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{3}} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{3}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{3}} + \frac{\sqrt[3]{9\sqrt{a}} - \sqrt[3]{a^2\sqrt{3}}}{\sqrt{a}-\sqrt{3}}\right)^3 \times$$
$$\times (0{,}1)^{3\lg 3}.$$

2. Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{\frac{(x-1)(x+2)}{\lg 0{,}8}}.$$

3. В 12 часов из городов A и B выехали навстречу друг другу с постоянными скоростями, соответственно, легковая и грузовая машины. В пути от B до A грузовая машина остановилась более чем на час для нагрузки, после чего, продолжив движение с прежней скоростью, встретилась с легковой машиной в 14 ч 12 мин. Определите время прибытия грузовой машины в город A, если известно, что скорость грузовой машины меньше, чем скорость легковой машины, и что каждая машина на путь от A до B затрачивает целое число часов.

4. Найдите все корни уравнения

$$\left(\frac{\cos\frac{9\pi}{4}}{\cos x}\right)^{-2} - \cos(\pi - 4x) = 0,$$

лежащие на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{2\pi}{3}\right]$.

5. В прямоугольной трапеции длины оснований равны 5 см и 15 см, а острый угол равен α. Найдите площадь трапеции.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Электрическое поле. Напряженность электрического поля. Напряженность поля точечного заряда. Однородное электрическое поле. Работа перемещения заряда в электрическом поле.

2. Почему при включении электронагревательного прибора величина тока в первый момент больше величины, которая установится спустя некоторое время?

3. На каком расстоянии от тонкой рассеивающей линзы надо поместить предмет, чтобы получить изображение, уменьшенное в $n=2$ раза? Фокусное расстояние линзы $F=40$ см.

4. С обрыва высотой $H=15$ м вертикально вниз бросают камень со скоростью $v_0=3$ м/с. Через какое время камень ударится о землю? Сопротивлением воздуха пренебречь.

5. Виток проволоки площадью $S=0{,}4$ см^2 равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B=0{,}7$ Тл. Определите амплитудное значение ЭДС индукции, если частота вращения витка $n=100$ об/с. Ось вращения находится в плоскости витка и составляет угол $\alpha=45°$ с направлением вектора магнитной индукции.

Вариант 2

1. Взаимодействие тел. Второй закон Ньютона. Применение второго закона Ньютона к движению тела по наклонной плоскости при наличии трения.

2. Почему человека в лесу легче услышать, чем увидеть?

3. При температуре $t_1=27$ °С давление газа в замкнутом сосуде было равно $p_1=3\cdot10^5$ Па. Какой будет температура при давлении $p_2=2{,}5\cdot10^5$ Па?

4. Сила тока в первичной обмотке трансформатора $I_1=0{,}5$ А, напряжение на ее концах $U_1=220$ В. Напряжение на концах вторичной обмотки $U_2=40$ В. Определите коэффициент трансформации и ток во вторичной обмотке. Потерями в трансформаторе пренебречь.

5. В каком диапазоне длин волн может работать радиоприемник, если индуктивность катушки в его колебательном контуре плавно изменяется в пределах от $L_1=0{,}2\cdot10^{-5}$ Гн до $L_2=2\cdot10^{-5}$ Гн, а емкость конденсатора постоянна и равна $C=50$ пФ?

Публикацию подготовили
А. А. Болотов, Ф. Е. Пашуканис

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Бассейн, содержавший 30 м^3 воды, сначала был опорожнен, а затем снова заполнен до прежнего уровня. На все это потребовалось 8 часов. Сколько времени шло заполнение бассейна, если при заполнении насос перекачивает в час на 4 м^3 воды меньше, чем при опорожнении?

2. Решите уравнение

$$\sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0.$$

3. Решите уравнение

$$16^{\frac{1}{x}} - 20\cdot 2^{\frac{2-2x}{x}} + 4 = 0.$$

4. Решите неравенство

$$x\log_2(x+2) > 0.$$

5. Середина бокового ребра правильной треугольной пирамиды находится на расстоянии d от высоты основания, не пересекающей это боковое ребро. При какой длине стороны основания пирамиды она будет иметь наибольшую площадь боковой поверхности? Найдите это значение площади.

Вариант 2

1. Вычислите площадь треугольника, ограниченного касательными, проведенными к графику функции

$$y = 5 + 2x - x^2$$

в точках с абсциссами $x_1=1$ и $x_2=3$, и прямой, соединяющей эти точки касания.

2. Решите уравнение

$$\sin^2 2x+\sin^2 x=1.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{3}{5^x-2}=5^{x-1}.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{1}{1-\lg x}<\frac{2\lg x-5}{1+\lg x}.$$

5. Одно основание правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны h, принадлежит основанию правильной шестиугольной пирамиды, а вершины другого основания лежат на боковых ребрах пирамиды. При какой высоте пирамиды объем вписанного в нее шара будет наибольшим? Найдите это значение объема шара. Определите также отношение объемов пирамиды и шара.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Снаряд разрывается в верхней точке своей траектории на высоте $h=320$ м на две части, массы которых относятся, как 1:2. Через $\tau=4$ с после разрыва более тяжелая часть падает на землю под тем местом, где произошел взрыв. На каком расстоянии от места выстрела упадет более легкая часть снаряда, если тяжелая упала на расстоянии $s=1200$ м? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. В водоеме укреплена вертикальная труба с поршнем так, что нижний конец ее погружен в воду. Поршень, лежавший вначале на поверхности воды, медленно поднимают специальным устройством на высоту $H=15$ м. Какую работу при этом совершает устройство? Площадь поршня $S=10^{-2}$ см^2; атмосферное давление $p_0=10^5$ Па; плотность воды $\rho=10^3$ кг/м^3; массой поршня можно пренебречь.

3. Два одинаковых шарика связаны невесомой нитью, перекинутой через невесомый блок, причем один из шариков погружен в сосуд с жидкостью. С какой установившейся скоростью будут двигаться шарики, если известно, что установившаяся скорость падения одиночного шарика в той же жидкости равна v_0? Считать, что сила сопротивления движению шарика в жидкости пропорциональна его скорости; плотность жидкости ρ_0; плотность материала шариков ρ; трение в блоке можно не учитывать.

4. Газ, занимающий при давлении $p=10^5$ Па объем $V=0{,}1$ м^3, изобарно расширяется. При этом его абсолютная температура увеличилась в 2 раза, а внутренняя энергия изменилась на $\Delta U=26$ кДж. Какую массу угля необходимо было сжечь для этого, если на нагревание газа было затрачено $\eta=20\,\%$ количества теплоты, выделившегося при сгорании? Удельная теплота сгорания угля $q=30$ МДж/кг.

5. Шарик массой $m=2$ г и зарядом $q=10^{-6}$ Кл, подвешенный на диэлектрической нити длиной $l=1$ м, совершает колебания в вертикальной плоскости. В плоскости колебаний создано однородное горизонтальное электростатическое поле. Угол, образуемый крайними положениями нити при колебаниях, составляет $2\alpha=90°$, а угол между вертикалью и нитью в момент прохождения шариком положения равновесия $\beta=15°$. Определите разность потенциалов между крайними точками траектории шарика.

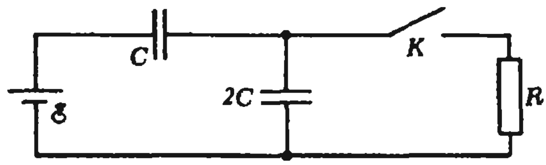


Рис. 1.

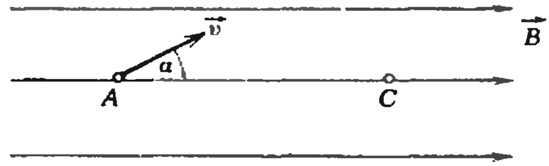


Рис. 2.

6. Какое количество теплоты выделится на резисторе после замыкания ключа (рис. 1)? Внутренним сопротивлением источника, сопротивлением проводов и потерями, связанными с электромагнитным излучением, пренебречь.

7. Электрон влетает в однородное магнитное поле (рис. 2). В точке A он имеет скорость $\vec{v}$, которая составляет с направлением поля угол α. При каком наименьшем значении индукции магнитного поля электрон сможет оказаться в точке C? Заряд электрона e, его масса m, расстояние $AC=L$, вектор $\vec{v}$ и отрезок AC лежат в плоскости, параллельной полю.

8. На плоскопараллельную стеклянную пластинку под углом α падает параллельный пучок света шириной l, содержащий две спектральные компоненты с длинами волн λ_1 и λ_2. Показатели преломления стекла для этих длин волн различны и равны n_1 и n_2 соответственно. Определите минимальную толщину пластинки, при которой свет, пройдя пластинку, будет распространяться в виде двух отдельных пучков, каждый из которых содержит только одну спектральную компоненту.

9. На расстоянии $d=80$ см от рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F=20$ см на ее главной оптической оси находится точечный источник света. Линзу передвинули в направлении, перпендикулярном оптической оси. Определите, куда и на сколько надо передвинуть источник, чтобы его изображение оказалось на прежнем месте.

10. В результате реакции слияния ядер дейтерия и трития образуется новое ядро и нейтрон. Пренебрегая различием масс покоя протона и нейтрона, определите, какую часть выделившейся при реакции энергии уносит нейтрон? Кинетическую энергию ядер дейтерия и трития до реакции не учитывать.

Публикацию подготовили *А. Г. Андреев, Л. П. Паршев*

Московский институт электронной техники

Математика

Письменный экзамен

1. Вычислите

$$\frac{(3{,}2-1{,}7):0{,}003}{\left(\frac{29}{35}-\frac{3}{7}\right)\cdot 4:0{,}2}-2{,}5.$$

2. Упростите

$$(\sqrt[3]{a^2}+b\sqrt[3]{a}+b^2)\frac{\sqrt[3]{a^4}-b^3+b^2\sqrt[3]{a}-ab}{ab^{-1}+b-b^4a^{-1}-b^2}.$$

3. Найдите $\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, если $\sin 2\alpha=\frac{1}{3}$.

4. Найдите сумму двадцати первых нечетных натуральных чисел.

5. Решите уравнение

$$\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}.$$

6. Решите уравнение

$$\sin(x+30^\circ)-\sin(x+210^\circ)=2\sin 495^\circ,$$

если $90^\circ<x<180^\circ$.

7. Решите уравнение

$$\sqrt{\log_{\sqrt{5}}5x}=-\log_x 5.$$

8. Третий член геометрической прогрессии равен 9/16, а второй больше пятого в 64 раза. Найдите ее знаменатель.

9. Решите неравенство

$$3^{2x-3}-9^{x-1}+27^{2x/3}<675.$$

10. На плоскости даны две окружности радиусов 12 см и 7 см с центрами в точках O_1 и O_2, касающиеся некоторой прямой в точках M_1 и M_2 и лежащие по одну сторону от этой прямой. Известно, что $O_1O_2:M_1M_2=\sqrt{5}/2$. Найдите M_1M_2.

11. Решите неравенство

$$|x|>2\sqrt{x^2-2x+1}.$$

12. Найдите величину $A=\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{y_1y_2}$, где (x_k, y_k), $k=1, 2$ — решения системы

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{41}{20},\\ x+y=41.\end{cases}$$

13. Решите неравенство

$$\sqrt{\log^2_{1/2}x+4\log_2\sqrt{x}}<\sqrt{2}(4-\log_{16}x^4).$$

14. Объем конуса равен 7π. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, вписанной в конус.

15. Дайте определение перпендикулярности прямой и плоскости.

16. Сформулируйте теорему Пифагора.

17. Выведите формулу синуса половинного аргумента.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. В некоторой области пространства созданы однородные постоянные магнитное и электрическое поля ($B=0{,}3$ Тл, $E=300$ кВ/м). Перпендикулярно обоим полям движется протон, не отклоняясь от прямолинейной траектории. Найдите скорость его движения.

2. Дальнозоркий человек начинает резко различать очертания предметов с расстояния один метр. Какой оптической силы очки ему нужны?

3. На расстоянии l от края стола лежит брусок. Коэффициент трения между бруском и столом равен μ. На брусок со скоростью v налетает точно такой же второй брусок и толкает его к краю стола. На каком расстоянии от края стола брусок упадет на пол, если высота стола H? При какой минимальной скорости налетающего бруска он упадет со стола? Размерами бруска по сравнению с l пренебречь. Удар считать абсолютно упругим.

4. В цилиндрическом сосуде под очень легким поршнем находится $m=3$ кг воды при $t=20$ °С. При нагревании воде было сообщено количество теплоты $Q=1017$ кДж. На какую высоту поднимется поршень, если атмосферное давление $p=10^5$ Па, а площадь сечения сосуда $S=3$ дм^2? Удельная теплоемкость воды $c=4190$ Дж/(кг · К), удельная теплота парообразования воды $r=2{,}26\cdot10^6$ Дж/кг, универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль · К). Изменением объема воды при испарении, а также ее тепловым расширением пренебречь.

5. Конденсатор емкостью C заряжен и отсоединен от батареи. К этому конденсатору подключают другой конденсатор емкостью C_1 ($C_1\neq C$), затем конденсаторы разъединяют. После этого исходный конденсатор (без его подзарядки) присоединяют к следующему незаряженному конденсатору емкостью C_1 и т. д. Сколько раз нужно повторить эту операцию, чтобы напряжение на исходном конденсаторе упало в два раза?

Вариант 2

1. Вычислите КПД энергетической установки атомного ледокола, если ее мощность $P=3{,}2\cdot10^4$ кВт, а атомный реактор расходует $m=200$ г топлива (U-235) в сутки. При делении одного ядра атома урана выделяется энергия $w=200$ Мэв. Заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, число Авогадро $N_A=6\times10^{23}$ моль$^{-1}$.

2. Три шарика соединены между собой одинаковыми нитями так, что образовался правильный треугольник. Система лежит на гладком горизонтальном столе. Какие одинаковые по величине и знаку заряды надо поместить на шарики, чтобы площадь треугольника увеличилась в два раза? Жесткость нитей k, начальная длина l.

3. Присоединение к амперметру некоторого шунтирующего сопротивления увеличивает пределы измерения тока в 3 раза. Другое шунтирующее сопротивление увеличивает пределы измерения в 7 раз. Во сколько раз увеличится предел амперметра, если в качестве шунта использовать оба эти сопротивления, предварительно соединенные между собой последовательно?

4. Источник света расположен на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=30$ см. Расстояние от источника до линзы $d=90$ см. За линзой перпендикулярно оптической оси помещено плоское зеркало. На каком расстоянии от линзы нужно его поместить для того, чтобы лучи, отраженные от зеркала, пройдя вторично через линзу, образовали параллельный пучок?

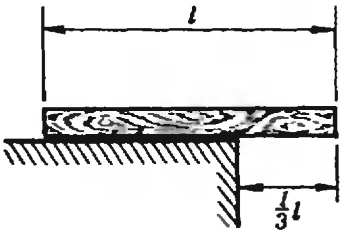


Рис. 1.

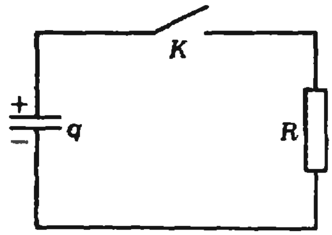


Рис. 2.

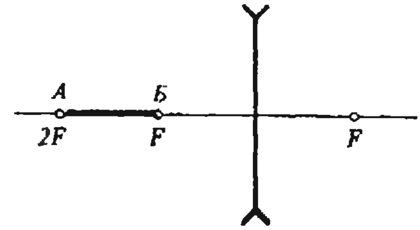


Рис. 3.

5. При скоростном спуске с горы с углом наклона $\alpha=30^\circ$ лыжник набрал скорость $v=72$ км/ч. Коэффициент трения лыж о снег $\mu=0,1$. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости. С какой максимальной скоростью будет двигаться тот же лыжник по склону с углом наклона $\beta=45^\circ$? Длину каждого склона считать достаточно большой.

Публикацию подготовили *А. В. Ефимов, Б. М. Орлов, А. С. Поспелов, А. Ю. Хренников*

Московский станкоинструментальный институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\log_3(3^{x^2-13x+28}+\frac{2}{9})=\log_5 0,2.$$

2. Определите значения k, при которых корни уравнения

$$x^2-(3k+2)x+k^2=0$$

удовлетворяют соотношению $x_1=9x_2$.

3. Решите уравнение

$$6\sin^2 x+\sin x\cdot\cos x-\cos^2 x=2.$$

4. Колонна войск протяжением 2 км движется по шоссе маршем со скоростью 3 км/ч. Конный вестовой выезжает из конца колонны в ее начало, передает приказание и тотчас же отправляется обратно. На проезд туда и обратно вестовой тратит 30 мин. Определите скорость вестового, если она на всем пути была одинакова.

5. В основании треугольной пирамиды лежит равнобедренный треугольник, площадь которого равна S, а угол при вершине равен α. Боковые ребра пирамиды образуют с высотой один и тот же угол β. Найдите объем пирамиды и радиус шара, описанного около нее.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\lg\frac{5^x\cdot 2+20^x\cdot 2}{5}=x.$$

2. Найдите все значения a, для которых неравенство

$$(a-1)x^2-(a+1)x+a+1>0$$

выполняется при всех действительных значениях x.

3. Решите уравнение

$$1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0.$$

4. Произведение цифр двузначного числа в три раза меньше самого числа. Если к искомому прибавить 18, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

5. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна a, а угол при вершине равен α. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом β. Найдите объем пирамиды и тангенс угла наклона боковой грани, противолежащей углу α, к основанию.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Спутник движется вокруг Земли по круговой орбите, радиус которой в два раза больше радиуса Земли. Определите скорость движения спутника, если первая космическая скорость у поверхности Земли равна $v_1=8$ км/с.

2. Однородная доска массой $M=1$ кг лежит на столе так, как показано на рисунке 1. Груз какой массы надо положить на правый конец доски, чтобы левый ее конец начал подниматься?

3. В герметичном сосуде объемом $V=20$ л находится смесь насыщенного водяного пара с гелием. Давление смеси $p=2\cdot 10^5$ Па, температура $T=373$ К. Определите количество гелия в сосуде. Молярная масса гелия $M_{He}=4$ г/моль.

4. При адиабатическом расширении один моль идеального одноатомного газа совершил работу $A=1,25$ кДж. Найдите изменение температуры газа.

5. В калориметре смешали $m_1=1$ кг льда, имеющего начальную температуру $t_1=-10$ °С, и $m_2=100$ г воды при температуре $t_2=0$ °С. Определите температуру смеси и ее агрегатное состояние после установления теплового равновесия. Теплообменом с калориметром и с окружающей средой пренебречь. Удельная теплота плавления льда $\lambda=336$ кДж/кг, удельная теплоемкость льда $c_1=2,1$ кДж/(кг·К).

6. Какое количество теплоты выделится на резисторе сопротивлением R после замыкания ключа (рис. 2)? Заряд конденсатора q, площади пластин S, расстояние между пластинами d, диэлектрическая проницаемость $\varepsilon=1$.

7. Проволочный виток площадью S и сопротивлением R находится во внешнем однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$. Линии индукции поля образуют угол α с нормалью к поверхности витка. Какой заряд протечет по витку, если поле выключить?

8. Найдите увеличение изображения отрезка AB, даваемого тонкой рассеивающей линзой с фокусным расстоянием F (рис. 3).

9. Для выжигания по дереву используют лупу с четырехкратным увеличением, фокусируя с ее помощью солнечный свет. На каком оптимальном расстоянии от поверхности дерева надо держать лупу?

10. В планетарной модели атома водорода электрон вращается вокруг ядра по круговой орбите. Какой кинетической энергией обладает электрон на орбите радиусом $r = 5 \cdot 10^{-11}$ м? Заряд электрона $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ Кл, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м

Публикацию подготовили
Л. Н. Дагаева, Д. В. Подлесный

Ответы, указания, решения

Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $v = \frac{\sqrt{3}}{4} h^3 \operatorname{ctg}^2 \varphi$.

2. $x \in \left[\frac{1}{27}; 1\right[\cup]9; \infty[$.

3. $x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

4. $ED = \frac{2\sqrt{2}}{3} a \sqrt{k+1},\ 1/4 \leqslant k < \frac{1}{2}$.

5. 11 555 550. Указание. Просуммируйте сначала все числа, отличные от 1 111 110.

Вариант 2

1. $x \in]0; 1[\cup]2; 6[$.
2. $x = (-1)^{k-1} \arcsin \frac{1}{3} + k\pi,\ k \in Z$.
3. $\frac{v_1}{v_2} = \frac{qD}{Qd}$.
4. $h = r\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
5. $t = \frac{59}{38}$ с.

Вариант 3

1. 53 %.
2. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z,\ x = \frac{\pi}{4} + l\pi,\ l \in Z$.
3. $\left[-3; \frac{7}{8}\right] \cup \left[\frac{9}{8}; 5\right]$.
4. $5\frac{10}{11}$.
5. $\varphi = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Вариант 4

1. $x = 2\pi k,\ k \in Z,\ x = (-1)^l \frac{\pi}{3} + 2l\pi,\ l \in Z$.
2. $x \in]-\infty; 2[\cup]4; 8[$.
3. $\frac{a}{\sqrt{2}}$.
4. $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$; б) $x = -1,\ y = -2,\ z = -3$.
5. $Q = \sqrt[3]{\frac{9v^2}{16 \sin^2 \alpha}}$.

Задачи устного экзамена

1. $x = 4k + 2,\ k = -2, -3, \ldots$
3. n-я группа состоит из n последовательных четных или нечетных чисел. $S_n = \left(\frac{n^2}{2} + 1\right) n$ при $n = 2k$, $S_n = \frac{n^2+1}{2} \cdot n$ при $n = 2k + 1$.
4. $a = 1,\ |b| < 2$.
5. $n = \pm 1,\ \pm 2$.
6. $a \geqslant -\frac{1}{6}$ — одно решение; $a < -\frac{1}{6}$ — нет решений.
7. 142 827.
8. Указание. Точки A и B лежат на одинаковом расстоянии от прямой, которая содержит медиану CM треугольника ABC. Задача имеет 3 решения.
9. Окружность, проходящая через точки A, B, C, если они являются вершинами остроугольного треугольника. Во всех других случаях — окружность, построенная на самом длинном из отрезков AB, BC, AC, как на диаметре.
10. Указание. Воспользуйтесь тем, что сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной вокруг него окружности.
11. Указание. Воспользуйтесь тем, что отрезок, соединяющий середины смежных сторон квадрата, пересекается с одной из его диагоналей в точке, являющейся серединой этого отрезка и делящей диагональ в отношении 3:1.

Физика

Физический факультет

1. $n = \sqrt{2h/g}\, v/d = 90$.
2. $x = 0{,}66$ м (x является положительным корнем квадратного уравнения $x^2 - 2hx - 2hH = 0$).
3. $T_{min} = \sqrt{3\pi/(G\rho)} = 0{,}0012$ с ($G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2) — гравитационная постоянная).
4. $p = \frac{\rho g h ((l-h)^2/4 - a^2)}{a(l-h)} = 20000$ Па.
5. $v = NRT/(pSMr) = 7{,}6$ м/с ($p = 10^5$ Па — нормальное атмосферное давление, $M = 18 \times 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса воды).
6. $\varphi = 6{,}9°$ (φ является корнем квадратного уравнения $\varphi^2 - 2\pi\varphi + 4\pi^2 r/R = 0$).
7. $U_1 = \frac{\mathscr{E}(n-1)C_2}{n(C_1+C_2)}$; $U_2 = \frac{\mathscr{E}(n-1)C_1}{n(C_1+C_2)}$.
8. $f \approx 4$ м (f является решением системы двух уравнений — формул линзы $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$ и $\frac{1}{d-l} + \frac{1}{f+L} = \frac{1}{F}$).

Радиофизический факультет

1. $t = \sqrt{\frac{2H}{g \sin \alpha (\sin \alpha - \operatorname{tg} \beta \cos \alpha)}}$.
2. $E_2 = \frac{F^2 t^2}{4E_1}\left(v_0 + \frac{2E_1}{Ft}\right)^2 = 5{,}3$ Дж.
3. Плотность куба в 4 раза меньше плотности воды, а плотность камня в 2 раза больше плотности воды.
4. $n = (mRT)/(pVM_0) = 2$ ($M_0 = 58$ г/моль — молярная масса группы C_3H_6O).

5. $E=\frac{(q_1+|q_2|)^3}{4\pi\varepsilon_0 q_1|q_2|l^2}=3{,}96\cdot10^3$ В/м.
6. $I_0=\sqrt{N/R_1}\,(\sqrt{R_1/R_2}+1)=1{,}6$ А.
7. $F=(d_1h_1-d_2h_2)/(h_1-h_2)=15$ см.

Московский энергетический институт

Математика

Вариант 1

1. 12 при $x\neq\pm2;\ x\neq0;\ x\neq4$.
2. См. рис. 1.

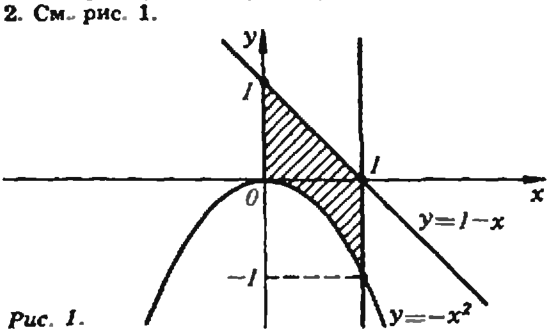


Рис. 1.

3. 2 г; 22 г. 4. $\{\pi/4\}$.
5. $\frac{\pi R^3(1+\sin\alpha)^3}{3\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha}$.

Вариант 2

1. $-\sqrt{3a};\ a\geqslant0,\ a\neq3$.
2. $[-2;1]$. 3. 17 ч 8 мин.
4. $\{-\pi/4;\ \pi/4;\ -\pi/3;\ \pi/3;\ 2\pi/3\}$.
5. $100\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

Физика

Вариант 1

2. Сопротивление холодного проводника (в момент включения электронагревательного прибора) больше сопротивления нагретого проводника (когда установится температурный режим).
3. $d=(n-1)F=40$ см.
4. $t=-\frac{v_0}{g}+\sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2+\frac{2H}{g}}\approx1{,}4$ с.
5. $\mathscr{E}_m=2\pi nBS\sin\alpha\approx12{,}5\cdot10^{-3}$ В.

Вариант 2

2. В условиях леса дифракция звука гораздо заметнее, чем дифракция света.
3. $T_2=250$ К; $t_2=-23$ °C.
4. $k=U_1/U_2=5{,}5$; $I_2=I_1U_1/U_2=2{,}75$ А.
5. $\lambda_1=2\pi c\sqrt{L_1C}\approx19$ м (здесь $c=3\cdot10^8$ м/с — скорость света в вакууме); $\lambda_2=2\pi c\sqrt{L_2C}\approx\approx60$ м.

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Математика

Вариант 1

1. 5 ч. 2. $x_1=\frac{k\pi}{2}$, $x_2=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi l$ $(k,l\in Z)$.
3. $\{1\}$. 4. $]-2;-1[\cup]0;+\infty[$.
5. $2\sqrt3\,d$; $3d^2\sqrt6$. Указание. Пусть $SABC$ — треугольная пирамида, $AB=a$. Докажите, что $S_{бок}=\frac{\sqrt6}{4}\sqrt{24a^2d^2-a^4}$, и исследуйте на максимум функцию $f(a)=24a^2d^2-a^4$.

Вариант 2

1. 2. 2. $x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi$; $x_2=\pm\pi/6+\pi l$ $(k,l\in Z)$.
3. $\{1\}$. 4. $\left]0;\frac{1}{10}\right[\cup]10;+\infty[$.
5. $7h$; $\frac{343}{384}\pi h^3$; $16/\pi\sqrt3$. Указание. Вписанный шар имеет наибольший радиус, когда середины ребер верхнего основания призмы лежат на поверхности шара (докажите это).

Физика

1. $l\approx13{,}1\cdot10^3$ м $\approx13{,}1$ км.
2. $A=p_0S\,(H-p_0/(2\rho g))=10^4$ Дж $=10$ кДж.
3. $v=v_0\rho_0/(\rho-\rho_0)$.
4. $m=(pV+\Delta U)/(\eta q)=6\cdot10^{-3}$ кг (здесь $\eta=0{,}2$).
5. $\varphi_1-\varphi_2\approx0{,}7\cdot10^4$ В.
6. $Q=C\mathscr{E}^2/6$.
7. $B=2\pi mv\cos\alpha/(eL)$.
8. $d_{min}=\frac{2l\sqrt{(n_1^2-\sin^2\alpha)(n_2^2-\sin^2\alpha)}}{\sin2\alpha\,(\sqrt{n_1^2-\sin^2\alpha}-\sqrt{n_2^2-\sin^2\alpha})}$.
9. Источник нужно передвинуть в противоположную сторону на расстояние, превышающее смещение линзы в 4 раза.
10. Нейтрон уносит 4/5 выделившейся при реакции энергии.

Московский институт электронной техники

Математика

1. 60. 2. ab. 3. 0,5. 4. 400. 5. 4. 6. 105°. 7. 0,04.
8. 1/4. 9. $x<3$. 10. 10. 11. $\frac{2}{3}<x<2$. 12. 40.
13. $\left]0;\frac{1}{4}\right]\cup\left[1;4\right[$. 14. 14.

Физика

Вариант 1

1. $v=E/B=10^6$ м/с.
2. $D=(d-d_0)/(dd_0)=+3$ дптр ($d=1$ м, $d_0=25$ см — расстояние наилучшего зрения).
3. $s=\sqrt{2H(v^2-2\mu gl)/g}$; $v_{min}=\sqrt{2\mu gl}$.
4. $h=\frac{Q-cm(T_к-T)}{pSMr/(RT_к)}\approx0{,}29$ м
($T_к=373$ К — температура кипения воды).
5. $n=\frac{\lg2}{\lg(1+C_1/C)}$.

Вариант 2

1. $\eta=(P\tau M)/(N_A m w)=0{,}17=17\,\%$ ($\tau=1$ сутки $=24\cdot60\cdot60$ с, $M=235\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса урана, $w=200\cdot10^6\cdot1{,}6\times\times10^{-19}$ Дж).
2. $q=\sqrt{8\pi\varepsilon_0 kl^3}\,(\sqrt2-1)$ (ε_0 — электрическая постоянная).
3. $n=2{,}5$ раза.
4. $l=F(2d-F)/(2(d-F))=37{,}5$ см.
5. $v'=v\sqrt{(\sin\beta-\mu\cos\beta)/(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}=89{,}5$ км/ч.

Московский станкоинструментальный институт

Математика

Вариант 1

1. $[3;10]$. 2. $k_1=-\frac{9}{16}$, $k_2=6$.
3. $x_1=-\pi/4+\pi k$; $x_2=\mathrm{arctg}\,3/4+\pi l$ $(k,l\in Z)$.
4. 9 км/ч.
5. $R=\frac{\sqrt{2S\sin\alpha}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\sin2\beta}$;

$$V=\frac{S\sqrt{2S\sin\alpha}}{6\cos\alpha/2\sin\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Вариант 2

1. $[-1;\ 1]$. 2. $a\in]5/3;\ +\infty[$.

3. $x_1=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi k$; $x_2=-\frac{\pi}{4}+\pi l$ $(k,l\in Z)$.

4. 24. 5. $V=(a^3\sin\alpha/2\cdot\operatorname{tg}\beta)/6$; $\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\beta\times\times(\cos\alpha)^{-1}$.

Физика

1. $v=v_1/\sqrt{2}=5{,}7$ км/с.
2. $m\geqslant M/2=0{,}5$ кг.
3. $\nu=(p-p_н)V/(RT)=0{,}6$ моль (здесь $p_н=10^5$ Па — давление насыщенных водяных паров при данной температуре).
4. $\Delta T=-2A/(3R)=-100$ К.
5. После установления теплового равновесия в калориметре будет смесь льда и воды при температуре 0 °С, причем воды будет $m_в=m_2-(c_1m_1\Delta t_1)/\lambda=0{,}04$ кг$=40$ г.
6. $Q=q^2d/(2\varepsilon_0S)$ (здесь ε_0 — электрическая постоянная).
7. $q=(BS\cos\alpha)/R$.
8. $\Gamma=1/6$.
9. $l=F=d_0/4=6{,}25$ см (здесь F — фокусное расстояние лупы, $d_0=25$ см — расстояние наилучшего зрения).
10. $E_k=e^2/(8\pi\varepsilon_0 r)=2{,}3\cdot10^{-18}$ Дж.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 4)

1.
$$\begin{array}{r} \times\ 292\\ 211\\ \hline 292\\ 292\ \\ 584\ \ \\ \hline 61612 \end{array}$$

2. Старший брат родился в 1962 году, а младший в 1969 году.
3. Цепь на рисунке не замкнута, поэтому ток по ней не потечет.
4. Если заменить каждую цифру «счастливого» билета ее дополнением до 9, т. е. 0 на 9, 1 на 8 и т. д., то полученный билет тоже будет «счастливым», причем если билет был из первой катушки, то полученный билет будет из второй катушки. Отсюда следует, что в каждой катушке одно и то же количество «счастливых» билетов.
5. Соединим одну из середин сторон с вершинами противоположной стороны отрезками

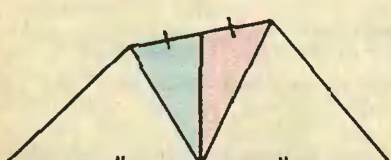


Рис. 2.

(рис. 2). Синий и красный треугольники равновелики, значит, равновелики и белые треугольники. Но в этом случае их высоты, опущенные на нижние стороны, равны, следовательно, верхняя сторона четырехугольника параллельна нижней.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 3)

1. В обоих случаях кубик опустится на 3 см.
2. Задача имеет два решения. Первое решение:

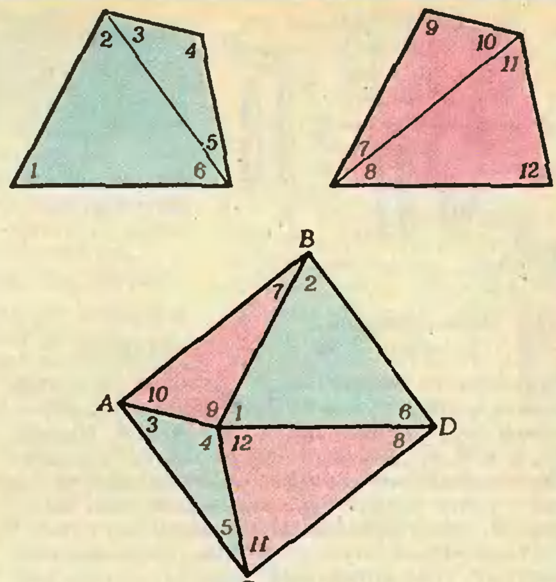


Рис. 3.

1 кошка, 1 собака и 1 попугай, при этом нет тараканов; второе решение: 2 таракана — и больше нет никаких других домашних животных.

3. Сложим из четырех полученных треугольников четырехугольник так, как показано на рисунке 3. Это можно сделать в силу равенства соответствующих сторон треугольников и того факта, что сумма углов 1, 4, 9 и 12 равна 360°, как сумма внутренних углов четырехугольника. Параллельность сторон полученного четырехугольника нетрудно проверить. Из того, что сумма углов 10 и 11 равна углу 1, следует, что сумма углов 10, 3, 5, 11 равна 180°. Поэтому стороны AB и CD параллельны. Параллельность сторон AC и BD доказывается аналогично.

4. Положим на левую чашку монету в 5 коп., а на правую чашку монеты в 2 и 3 коп. Если весы будут в равновесии, то бракованная монета — в 1 коп. Если перевесит одна из чашек, то положим на левую чашку монету в 3 коп., а на правую — 2 и 1 коп. Если сейчас весы окажутся в равновесии, то бракованная монета — в 5 коп. Если при втором взвешивании будет легче та же чашка, что и при первом взвешивании, то бракованная монета — 2 коп., в противном случае — монета в 3 коп.

5. Н=0, А=1, В=2, О=3, Е=4, К=5, Т=6, И=7, Р=8, П=9.

Калейдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 4)

Головоломки

1. См. рис. 4.
2. См. рис. 5.
3. $18{,}75\cdot10^{-4}\pi$ см.

Рис. 4.

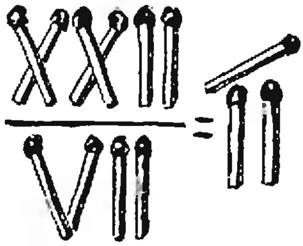


Рис. 5.

Наша обложка
(см. «Квант» № 4, 4-ю с. обложки)

Занумеруем пирамидки из шариков так, как показано на рисунке 6. Последовательно перекатим пирамидки 7, 2, 2, 1, 1, 4, 4, 6, 6, 10, 11, 11, 8, 8, 2, 2, 1, 4, 6, 10, 10, 11, 11, 8, 2, 7, соблюдая общее направление движения по часовой стрелке вокруг кружка, отмеченного звездочкой. Получим циклическую перестановку $1\to2\to8\to11\to10\to6\to4\to1$. Аналогично можно получить симметричный «цикл» $2\to3\to5\to\to9\to12\to11\to7\to2$. Эти два цикла позволяют получить любое распределение цветов пирамидок.

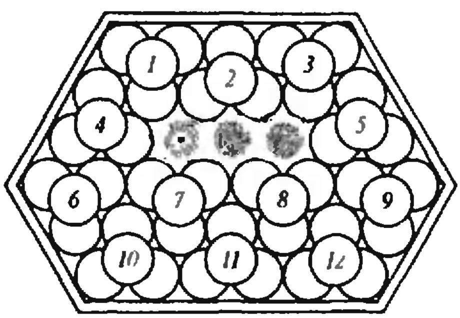


Рис. 6.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 2)

Задание 3 (Г. Ринк, 1937 г.). **1. Ke5+ Kpe8 2. Kpb8! Фh7 3. Фe6+ Kpf8** (3... Фe7 4. Фc6+ Kpf8 5. Kg6+ с выигрышем ферзя) **4. Kd7+ Kpg7 5. Фf6+ Kpg8 6. Фf8×.**

Задание 4 (К. Манн, 1922 г.). **1. Фa8+ Фg8 2. Фa7 Фg7 3. Фb8+ Фg8 4. Фe5+ Фg7 5. Фe8+ Фg8 6. Фd7 Фf7 7. Фd4+ Фg7 8. Фd8+ Фg8 9. Фf6+ Фg7 10. Фh4+ Kpg8 11. Cd5+ Kpf8 12. Фd8×.**

Квант

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин,
А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
А. В. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов,
Т. Н. Кольченко, Н. С. Кузьмина, Э. В. Назаров,
И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, П. И. Чернуский,
В. В. Юдин

Фото представили:
Фотохроника ТАСС

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов
Художественный редактор Т. М. Макарова
Корректор Т. С. Вайсберг

Сдано в набор 18.03.87. Подписано к печати 27.04.87.
Т-09765. Бумага 70×108/16. Печать офсетная.
Усл. кр.-от. 23,8. Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,02.
Тираж 208 284 экз. Цена 40 коп. Заказ 721.

Ордена Трудового Красного Знамени Чеховский полиграфический комбинат ВО «Союзполиграфпром» Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Шахматная страничка

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ЧЕМПИОНАТЫ КОМПЬЮТЕРОВ

В конце прошлого года состоялись сразу два первенства мира по шахматам среди ЭВМ. В ФРГ прошел пятый чемпионат среди больших, универсальных компьютеров, а в США — шестой чемпионат среди шахматных микрокомпьютеров. Предыдущие чемпионы сохранили свое звание: «Крэй блитц» (США) и «Мефисто» (ФРГ) вновь завоевали «шахматную корону» соответственно среди больших и малых ЭВМ. В состязании «универсалов» участвовали 23 компьютера, разыгравших первенство по швейцарской системе в пять туров. Первое место разделили «Крэй блитц», «Хитеч», «Бебе» и «Феникс», набравшие по 4 очка. По коэффициенту победа досталась предыдущему чемпиону. Программа «Крэй блитц», разработанная в Южно-Миссисипском университете (США), написана на языках фортран и ассемблер и реализована на машине «Крэй-Х-МП».

По мнению мастеров и гроссмейстеров, присутствовавших на чемпионате в ФРГ, на нем был сыгран самый увлекательный поединок за всю историю компьютерных шахмат. Вот он.

«Хитеч» — «Шах»
Сицилианская защита

1. e4 c5 2. Kf3 d6 3. Cc4 e6 4. d4 cd 5. K:d4 Kf6 6. Kc3 Ce7 7. Ce3 Kbd7 8. Фd2 Ke5 9. Ce2 0—0 10. h3 Cd7 11. Kf3 K:f3+ 12. gf. Соперники быстро отошли от теории, и возникшее положение можно оценить как примерно равное. Последний ход белых довольно неожиданный — в «сицилианке» редко сдваивают пешки подобным образом. Почему же машина побила на f3 пешкой? Известно, что сдвоенные пешки уменьшают значение оценочной функции, которой руководствуется машина при выборе хода, однако наличие открытой или полуоткрытой линии увеличивает значение оценочной функции. Видно, для «Хитеча» второй фактор оказался важнее.

12...Фa5 13. 0—0—0 Лac8.

Белые собираются атаковать на королевском фланге, черные стремятся к контригре на ферзевом. Но обе стороны не должны забывать и о защите. Поэтому черным лучше было сейчас отправить на c8 другую ладью, освобождая поле f8 для слона.

14. Лhg1 Лfe8 15. Ch6 g6 16. Cg5 Фc5. Серьезная ошибка. Потеря темпа, а за ним и второго ставит черных в щекотливое положение. Дальнейшую часть партии белые проводят безукоризненно. В духе позиции было b7—b5, немедленно затевая схватку на «своем» участке доски (16... b5 17. Фf4 b4!). Возможно, черного ферзя прельстила пешка f2.

17. Фf4 Kh5 18. Фh4. Во всех современных программах заложен метод, называемый ФВ («форсированный вариант») — после обрыва обычного варианта на заданной глубине дальше исследуются только взятия и шахи. Поэтому в игре, которая носит форсированный характер, компьютер ориентируется вполне уверенно. Не исключено, что дальнейшие тактические нюансы видели обе машины.

18...f6. Эффектно завершался поединок после напрашивающегося 18...Cf8 (18... C:g5 19. Л:g5 и 20. Ф:h5 с выигрышем фигуры): 19. Ф:h5!! gh 20. Cf6+ Cg7 21. Л:g7+ Kpf8 (21...Kph8 22. Лg6×) 22. Лdg1 с матом.

19. Ce3 Фa5. На первый взгляд черный король в безопасности благодаря поддержке ферзя, но белые находят чисто задачную идею перерезать ему дорогу. **20. Cb5!!** Блестящий тактический удар. **20...C:b5 21. Ф:h5 g5.** Другой способ не потерять фигуру состоял в 21...Л:c3!? После 22. Л:g6+ Kph8 23. Лdg1 уже черные объявляли мат: 23...Л:c2+!! 24. Kpb1 (24. Kp:c2 Cd3+ и 25...Ф:h5) 24... Л:b2+! 25. Kp:b2 Фb4+ и т. д. Почему же «Шах», видевший эту комбинацию, отказался от нее? Дело в том, что машина обнаружила матовую комбинацию не только за себя, но и за соперника: 23. Ф:h7+!! (вместо 23. Лdg1) 23...Kp:h7 24. Лh6+ Kpg8 25. Лg1+ Kpf8 26. Лh8+ Kpf7 27. Лh7+ Kpf8 28. Ch6×.

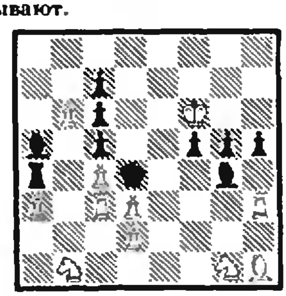
22. C:g5!! fg 23. Л:g5+! Белые ведут атаку, что называется, на одном дыхании. Сейчас после 23...C:g5 24. Ф:g5+ Kpf7 (24...Kph8 25. Фf6+ Kpg8 26. Лg1×) 25. Фh5+ Kpe7 26. Ф:h7+ Kpf6 черный король получал красивый мат в центре доски: 27. e5+! Kp:e5 (27...de 28. Ke4×) 28. Фg7+ Kpf5 29. Фf7+ Kpe5 (29...Kpg5 30. Лg1+) 30. f4×!

23...Kph8 24. Лdg1. Здесь партия закончилась, потому что у черных нет спасения от 25. Ф:h7+ и 26. Лh5×. Эффектный поединок!

После такой яркой победы все были уверены, что «Хитеч» станет чемпионом мира, однако в последнем туре в позиционной борьбе он уступил своему главному сопернику.

Конкурсные задания

9. Белые начинают и выигрывают.



10. Белые начинают и дают мат в 3 хода.

В первой позиции «Мефисто» разобрался менее чем за две минуты, на вторую «уважающий себя компьютер» тратит не более пяти минут. Вам дается более месяца.

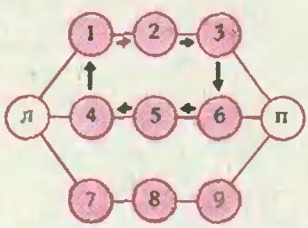
Срок отправки решений — 20 июля 1987 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 9, 10».

Цена 40 коп.

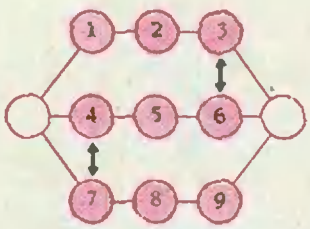
Индекс 70465

Когда подготовка материалов этого номера журнала уже заканчивалась, на прилавках московского «Детского мира» появилась новая комбинаторная головоломка. И хотя она не столь эффектна, как ее сородичи, представленные в предыдущих номерах, именно ей — последней новинке — решили мы отдать эту страницу. В ней имеется 9 нумерованных шашечек, размещенных тремя рядами на «каретке», которая свободно скользит внутри прямоугольной рамки; в бортах рамки сделаны ниши, благодаря которым шашечки можно переставлять — все это видно на центральном рисунке. Задача в том, чтобы научиться расставлять шашки по порядку номеров, исходя из произвольной расстановки. Найти решение помогает граф головоломки (рис. 1). Каждому из 11 возможных мест для шашек на нем отвечает кружок; если два места непосредственно сообщаются друг с другом, то соответствующие кружки соединены линией. Например, с места 1 (см. рис. 1) можно попасть на место Л (в левую нишу — для этого нужно сначала установить верхний ряд каретки посередине рамки) или на место 2 и т. д. Линии графа образуют 3 замкнутых 8-звенных кольца, вдоль которых можно циклически переставлять шашки. Такие циклические перестановки (или просто «циклы») служат кирпичиками, из которых можно составить любую перестановку. Обозначим через A цикл $1\to2\to3\to6\to5\to4\to1$ (сдвиг шашек в кольце, образованном верхним и средним рядами, по часовой стрелке на одно место, не считая пустых

Рис. 1.



A



$K = ABA^{-1}B^{-1}$

Рис. 2.

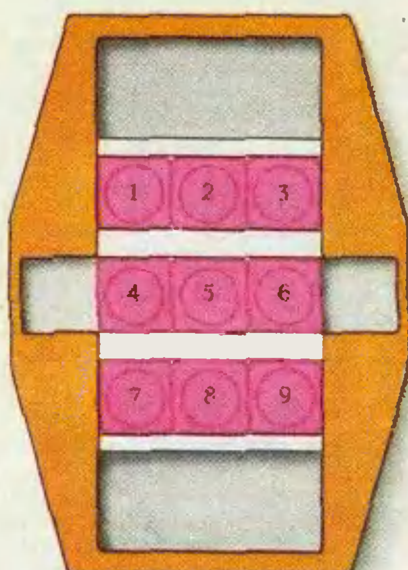
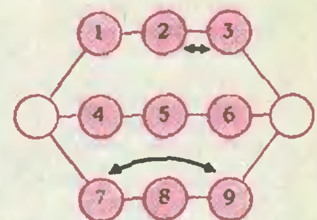
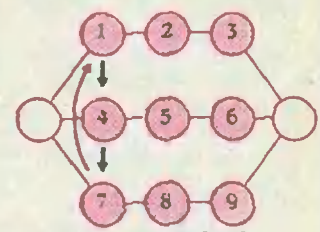


Рис. 3.



$K_1 = B^2AKA^{-1}B^{-2}$



$A^{-1}CAC^{-1}ABA^{-1}B^{-1}$

Рис. 4.

мест Л и П; рис. 1), через B — цикл в среднем и нижнем ряду: $4\to5\to6\to9\to8\to7\to4$, через C — в верхнем и нижнем: $1\to2\to3\to9\to8\to7\to1$. Выполним последовательно циклы A, B, A^{-1} и B^{-1} (A^{-1} — операция, обратная к A: $1\to4\to5\to6\to3\to2\to1$, B^{-1} — обратная к B). В результате две пары шашек меняются местами: $3\to6$, $4\to7$ (рис. 2). Составленная таким образом из A и B операция $K=ABA^{-1}B^{-1}$ называется коммутатором A и B. Выясните, как «работают» коммутаторы циклов A и C, A и B^{-1}, B и C^2 и т. д. Операция, показанная на рисунке 3, — $K_1=FKF^{-1}$, где $F=B^2A$, — действует так же, как K, но на других шашках — на тех, которые попадают на места 3, 4, 6 и 7 под действием F. Говорят, что K_1 получено из K сопряжением. Рассмотрите операции вида $A^nK_1A^{-n}$ ($n=1, 2,\ldots, 5$), сопряженные с K_1, — они переставляют шашки 7 и 9 и любые две соседние шашки верхнего и среднего ряда, поэтому с их помощью можно получить любую перестановку шашек этих двух рядов. На рисунке 4 показано, как из двух коммутаторов составляется еще одна полезная перестановка — тройной цикл.

Приведенные нами операции иллюстрируют основные приемы решения всех комбинаторных головоломок — использование графа, циклов, коммутаторов, сопряжений. Попробуйте довести начатое нами до конца и доказать, что в нашей игре любую из $9!=362880$ перестановок шашек можно упорядочить по номерам. Предлагаем, в частности, найти операцию, переставляющую только две шашки 1 и 2. Интересно отметить, что если в одну из ниш вставить дополнительную шашку № 10, то последняя задача уже будет неразрешима; в этой игре можно будет получить только половину всех возможных перестановок. Почему?

В. Н.